一、代数......2
1 整除......2
1.1 整除......2
1.2 因数、倍数......3
1.3 素因数、合因数......3
1.4 公因数、最大公因数......3
1.5 公倍数、最小公倍数......3
1.6 短除法求两个数的最大公因数和最小公倍数......4
1.7 短除法求三个数的最大公因数和最小公倍数......4
1.8 例题......4
2 分数......4
2.1 性质......4
2.2 运算......5
2.3 分数与小数转换......6
2.4 分数与小数运算......6
3 比和比例......6
3.1 比......6
3.2 百分数......7
4 有理数......8
4.1 数的分类......8
4.2 有理数......8
4.3 有理数运算......9
5 简单的代数式......10
5.1 代数式......10
5.2 一次式......10
6 一元一次方程......11
6.1 一元一次方程......11
6.2 一元一次方程应用题......11
7 二元一次方程组......11
8 一元一次不等式组......12
8.1 一元一次不等式......12
8.2 一元一次不等式组......12
9 整式......12
9.1 整式......12
9.2 因式分解......13
10 分式......14
10.1 分式......14
10.2 分式方程......15
11 实数......15
11.1 开平方......15
11.2 开立方......15
11.3 开方......15
11.4 实数......15
11.5 科学计数法......15
11.6 近似数......16
12 二次根式......16
12.1 二次根式......16
12.2 最简二次根式......16

13 一元二次方程 17
13.1 一元二次方程的一般形式......17
13.2 一元二次方程的解法......17
14 平面直角坐标系......18
14.1 平面直角坐标系......18
14.2 坐标系中点的运动......18
15 一次函数和正反比例函数......19
15.1 函数......19
15.2 正比例函数......19
15.3 一次函数......19
15.4 反比例函数......20
16 代数式方程......20
16.1 整式方程......20
16.2 分式方程......21
16.3 无理方程......21
16.4 二元二次方程组......21
16.5 应用题......22
17 二次函数......22
18 集合与逻辑......23
18.1 集合......23
18.2 逻辑......24
19 等式与不等式......25
19.1 等式......25
二、概率统计......25
1 概率......25
2 统计......25
三、几何......28
1 平面几何......28
1.1 线......28
1.2 角......28
1.3 圆......29
1.4 图形的运动......31
1.5 相交与平行......32
1.6 命题与证明......32
1.7 尺规作图......33
1.8 三角形......34
1.9 四边形......36
1.10 平面向量......36
1.11 锐角的三角比......39

一、代数

1 整除

1.1 整除

- 如果 a÷b=c 或 a=b×c，且 a、b、c 都是整数（注意 a、b、c 可以是负整数，如果任一为小数、分数，则不是整除），则 a 能被 b 整除，b 能整除 a；同时，a 能被 c 整除，c 能整除 a，如 18÷9=2，则 18 被

9 整除，9 能整除 18

- 能被 2 整除的数是偶数（注意-2 也是偶数），偶数个位是 0、2、4、6、8，不能被 2 整除的数是奇数，奇数个位是 1、3、5、7、9，能被 3 整除的数的各位数字之和能被 3 整除，能被 5 整除的数的个位是 0、5，能被 9 整除的数的各位数字之和能被 9 整除

1.2 因数、倍数

- 18=□×□，则 2 个□是 18 的因数，18 是 2 个□的倍数
- 18=1×18，18=2×9，18=3×6，因此 18 的因数有 1、18、2、9、3、6，整数的最小因数是 1，最大因数是自己

1.3 素因数、合因数

- 18=1×18=1×2×9=1×2×3×3，无法再分解了；18=2×9=2×3×3，无法再分解了；18=3×6=3×2×3，无法再分解了，可见不管选哪两个因数，18 分解到最后只有唯一结果（2×3×3），反过来 2、3、3 中的任意一个、两个、三个相乘，就构成了 18 的全部因数（除 1 外），即 2、3、6（2×3）、9（3×3）、18（2×3×3），且相乘的数越多，就是越大的那个因数
- 2、3 是不能再分解的数（即 2 分解为□×□时，□只能是 1 和 2 自己，不能分解为其它的□），称为素数；100 以内的素数有 25 个：2、3、5、7、11、13、17、19、23、29、31、37、41、43、47、53、59、61、67、71、73、79、83、89、97
- 而 18、9、6 分解为□×□时，□可以是除 1 和自己之外的数，18、9、6 称为合数
- 2、3 是 18 的素因数，18、9、6 是 18 的合因数，1 是 18 的非素数、非合数的因数，18 分解为含合因数时还可以再分解，分解为全部是素因数时，就不能再分解了；正整数分为 1、合数、素数
- 短除法分解素因数：先用最小的素数去除，然后用次小的素数去除，直到商为素数为止，最后要将所有素因数按从小到大顺序连乘起来

2 | 18	2| 12
3 | 9	2| 6
3	3
18=2×3×3	12=2×2×3

1.4 公因数、最大公因数

- 18=2×3×3，18 的素因数是 2、3、3，他们中的任意一个、两个或三个相乘，构成了 18 的所有非 1 的因数，即 2、3、6（2×3）、9（3×3）、18（2×3×3）
- 12=2×2×3，12 的素因数是 2、2、3，他们中的任意一个、两个或三个相乘，构成了 12 的所有非 1 的因数，即 2、3、4（2×2）、6（2×3）、12（2×2×3）
- 如果 18 和 12 有相同的因数（公因数），由于它是 18 的因数，所以它是 18 的几个素因数之积，由于它又是 12 的因数，所有它又是 12 的几个素因素之积，因为一个数只能分解为唯一的几个素因数之积，所以 18 的这几个素因数一定和 12 的几个素因数相同
- 18 和 12 的公因数中最大的那个公因数（最大公因数），一定是 18 和 12 所有相同的素因数之积
- 如果两个整数的最大公因数是 1，则它们互素；如果一个整数是另一个整数的因数，则这个整数就是它们的最大公因数

1.5 公倍数、最小公倍数

- 18×12 既是 18 的倍数，又是 12 的倍数（公倍数），而 18×12×2、18×12×3......也是 18 和 12 的公倍数，所以 18 和 12 的公倍数有无数个
- 这些公倍数中最小的称为最小公倍数，18×12=2×3×3 × 2×2×3 是 18 和 12 的公倍数，18 和 12 的共同素因数有 2 和 2，3 和 3，如果去掉一套所有的相同素因数（2 和 3），保留一套（2 和 3），~~2~~×3×~~3~~ × 2×2×3 = 3×2×2×3，这里既包含了 18 的所有素因数 2×3×3（虽然去掉了一套 2 和 3，但保留了一套 2 和 3），使得它是 18 的倍数，又包含了 12 的所有素因数 2×2×3，使得它是 12 的倍数，而且除了 18 和 12 的所有素因数外，没有其它的素因数，因此它是最小公倍数；18 和 12 的最小公倍数的素因数都在

18 和 12 的素因数中，18 和 12 的素因数也都在最小公倍数的素因数中

- A、B 的最大公因数 $c = c_1 \times c_2 \times \ldots \times c_n$，最小公倍数 $d = c_1 \times c_2 \times \ldots \times c_n \times d_1 \times d_2 \times \ldots \times d_m$，则 $c_1 \times c_2 \times \ldots \times c_n$ 为 A 和 B 的都有部分，$d \div c = d_1 \times d_2 \times \ldots \times d_m$ 为 A 和 B 的分有部分，即 A=$c_1 \times c_2 \times \ldots \times c_n \times d_1 \times d_2 \times \ldots \times d_k$，B=$c_1 \times c_2 \times \ldots \times c_n \times d_{k+1} \times d_{k+2} \times \ldots \times d_m$，A 中所有的 d_i 和 B 中的所有 d_j 都不相同（否则 A、B 就有不在最大公因数 C 中的相同素因数），A×B=$c_1 \times c_2 \times \ldots \times c_n \times c_1 \times c_2 \times \ldots \times c_n \times d_1 \times d_2 \times \ldots \times d_m = 最大公因数c \times 最小公倍数d$，如 A×B=144=2×2×2×2×3×3，A 和 B 的最小公倍数 36=2×2×3×3，则 A 和 B 的最大公因数是 4=144÷36=2×2，则 A=2×2×☐，B=2×2×∆，而☐和∆瓜分 36÷4=9=3×3 这两个素因数，且☐瓜分的素因数不能与∆瓜分的素因数相同，因此只有一种瓜分方法，就是 3×3 都给☐，而∆=1，由此 A=2×2×3×3=36，B=2×2×1=4

1.6 短除法求两个数的最大公因数和最小公倍数

2	18	12
3	9	6
	3	2

- 先用公有的最小素数 2，然后用 3，然后用 5....，去除 18 和 12，分解出他们的相同素因数，直到商不能再分解（也就是两个商没有 1 之外的公有素因数，即互素）
- 2 和 3 是 18 和 12 的相同素因数，因此 2×3=6 是最大公因数，2×3×3×2=36 是最小公倍数（所有相同素因数、各自剩余素因数之积）

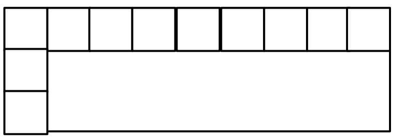
1.7 短除法求三个数的最大公因数和最小公倍数

2	16	24	60	先用三个数公有的最小素因数去除
2	8	12	30	继续用三个数公有的最小素因数去除
3	4	6	15	三个数没有公有素因数了，用两个数公有的素因数去除，另一个数不变（4）
2	4	2	5	三个数没有公有素因数了，用两个数公有的素因数去除，另一个数不变（5）
	2	1	5	三个商互素

- 最大公因数是三个数公有的素因数之积，2×2=4，最小公倍数是所有三个数公有的素因数、两个数公有的素因数、每个数剩余的素因数之积，2×2×3×2×2×5=240

1.8 例题

- 一块长 20 米，宽 8 米的长方形木板，锯成尽可能少的小正方形，而且锯完没有剩余，可以锯出多少块小正方形？

解析：锯完没有剩余，说明长度和宽度都能整除正方形边长，即正方形边长是 20 和 8 的因数。锯成尽可能少的正方形，则说明边长要尽可能大，也就是 20 和 8 的最大公因数，因此边长是 4，长度可锯成 20÷4=5 段，宽度可锯成 8÷4=2 段，一共是 5×2=10 块长方形。

- A 与 B 的最小公倍数是 30，A 与 6 的最大公因数是 2，B 与 5 的最大公因数是 1，则 A 是___，B 是___。

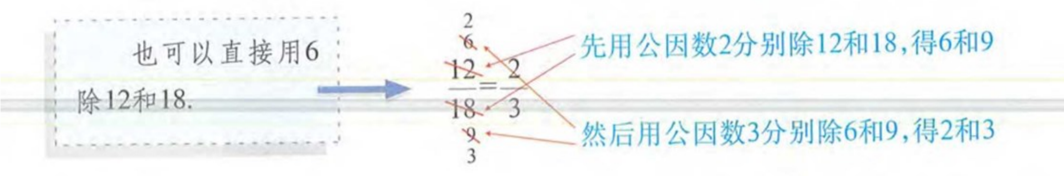
解析：最小公倍数 30=2×3×5，最小公倍数的素因数是 A、B 的相同素因数留一个，以及不相同的素因数，也就是说 A、B 都只可能是 2、3、5 中的一个、两个或三个素因数相乘。由于 A 与 6 的最大公因数是 2，而 6=2×3，A 和 6 都有公因数 2，而没有公因数 3，说明 A 有素因数 2，无素因数 3，因此 B 必须有素因数 3。B 与 5 的最大公因数是 1，说明 B 无素因数 5，因此 A 有素因数 5。由此确定 A 有素因数 2、5，A=2×5=10。B 无素因数 5，有素因数 3，而 2 可能有，也可能没有，所以 B=3 或 6。

2 分数

2.1 性质

- 分数：a、b 都为正整数，a÷b=$\frac{a}{b}$，读作 b 分之 a，a 为分子，b 为分母

- 分数的含义：分数=$\frac{分子}{分母}$的含义是，1 个单位的分母，能产出（或需要）$\frac{分子}{分母}$个单位的分子，如产出 9 千瓦时电需要 5 千克煤，则$\frac{9\ 千瓦时电}{5\ 千克煤}$是 1 千克煤（分母单位是千克），能产出（或需要）$\frac{9}{5}$千瓦时电（分子单位是千瓦时），而$\frac{5\ 千克煤}{9\ 千瓦时电}$是 1 千瓦时电（分母单位是千瓦时），能产出（或需要）$\frac{5}{9}$千克煤（分母单位是千克）
- 分数的应用：A 比 B 多或少几分之几（多或少百分之几），则大-小作分子，比字后面是 B，B 作分母，如 A 比 B 多几分之几，则$\frac{A-B}{B}$，如 B 比 A 少几分之几，则$\frac{A-B}{A}$，如 A 比 B 少几分之几，则$\frac{B-A}{B}$，如 B 比 A 多百分之几，则$\frac{B-A}{A}$
- 真分数是 a<b，如$\frac{1}{3}$，假分数是 a ≥ b，如$\frac{4}{3}$，带分数是整数+真分数，如$1\frac{1}{3}$是带分数，带分数化为假分数：$1\frac{1}{3}=1+\frac{1}{3}=\frac{3}{3}+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$，$-1\frac{1}{3}=-(1+\frac{1}{3})=-(\frac{3}{3}+\frac{1}{3})=-\frac{4}{3}$，或 $3\frac{5}{9}=\frac{3\times9+5}{9}=\frac{32}{9}$，假分数化为带分数：$\frac{32}{9}=\frac{27+5}{9}=\frac{27}{9}+\frac{5}{9}=3+\frac{5}{9}=3\frac{5}{9}$
- 分数性质：$\frac{a}{b}=\frac{a\times k}{b\times k}=\frac{a\div k}{b\div k}(b\neq0,k\neq0)$，写出三个与$\frac{12}{30}$相等的且分母且小于 30 的分数，$\frac{12\div2}{30\div2}=\frac{6}{15}$，$\frac{12\div3}{30\div3}=\frac{4}{10}$，$\frac{12\div6}{30\div6}=\frac{2}{5}$
- 约分：分子和分母都除以相同公因数，如$\frac{3}{6}=\frac{3\div3}{6\div3}=\frac{1}{2}$，可简写为$\frac{3}{6}=\frac{\cancel{3}\ 1}{\cancel{6}\ 2}=\frac{1}{2}$
- 最简分数：分子、分母都约去最大公因数（最大公因数=分子、分母所有相同素因数之积），或者不断约去各公因数，最后使得分子和分母互素（无非 1 公因数），叫最简分数，如$\frac{10}{20}=\frac{\cancel{10}\ 1}{\cancel{20}\ 2}=\frac{1}{2}$



- 通分：两个异分母分数不能直接比较大小，也不能加减，如$\frac{5}{6}$、$\frac{7}{8}$无法直观比较大小，也无法直接加减，需要先使它们的分母相同，方法是将它们的分子和分母各自乘以一个数，使两个分数的分母为相同分母（一般为两个分母的最小公倍数），如通分$\frac{1}{3}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{5}{9}$，因为分母 3、4、9 的最小公倍数是 36，$\frac{1\times12}{3\times12}=\frac{12}{36}$，$\frac{3\times9}{4\times9}=\frac{27}{36}$，$\frac{5\times4}{9\times4}=\frac{20}{36}$，所以$\frac{1}{3}<\frac{5}{9}<\frac{3}{4}$

2.2 运算

- 运算的顺序、方法和整数一样，带分数在加减时先变成整数+分数，乘除时先变成假分数，最后结果必须约分为最简分数，假分数需要化为带分数，如$3\frac{25}{14}$应写成 $4\frac{11}{14}$
- 同分母时$\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c}$（c≠0，异分母的分数加减时先通分为同分母的分数），$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$，$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}(b\neq0，c\neq0，d\neq0)$，即除法变为乘以倒数（a 的倒数是$\frac{1}{a}$，如-2 的倒数是$-\frac{1}{2}$，一个数×它的倒数=1）

- 例题 1：$3\frac{5}{12}-\frac{11}{4}=3+\frac{5}{12}-\frac{11}{4}=3+\frac{5}{12}-\frac{33}{12}=3+\frac{5-33}{12}=3-\frac{28}{12}=3-\frac{7}{3}=\frac{9}{3}-\frac{7}{3}=\frac{9-7}{3}=\frac{2}{3}$，带分数$3\frac{5}{12}$先变成$3+\frac{5}{12}$，计算量少，否则要变成假分数$3\frac{5}{12}=\frac{3\times12+5}{12}=\frac{41}{12}$
- 例题 2：$\frac{8}{9}\times13\frac{1}{2}=\frac{8}{9}\times\frac{27}{2}=\frac{\cancel{8}\ 4}{\cancel{9}\ 1}\times\frac{\cancel{27}\ 3}{\cancel{2}\ 1}=\frac{4\times3}{1}=12$，<u>乘除法时带分数必须先变成假分数，约分时可一个分数的分母和另一个分数的分子进行约分</u>

2.3 分数与小数转换

- 分数一定能化为有限小数或无限循环小数（做除法即可得到小数，$\frac{3}{2}=3\div2=1.5$），有限小数或无限循环小数一定能化为分数（变成分子为整数，分母为 10、100 等即可得到分数，1.5=$\frac{15}{10}=\frac{3}{2}$，$0.89=\frac{89}{100}$）
- 如果最简分数的分母的素因数只有 2 和 5，则该分数可化为有限小数，否则化为无限循环小数，如$\frac{5}{6}=\frac{5}{2\times3}$，$\frac{5}{6}$是最简分数，分母的素因数有 2 和 3，所以不能化为有限小数，如$\frac{3}{10}$是最简分数，$\frac{3}{10}=\frac{3}{2\times5}$，分母的素因数只有 2 和 5，所以可以化为有限小数
- 无限循环小数：一个小数从小数部分的某一位起，一个或几个数字不断重复，重复的一个或几个数字叫循环节，在第一个循环节的第一个和最后一个数字上加点，后面的循环节省略，如 0.33333333…记为$0.\dot{3}$，0.0301301301…记为$0.0\dot{3}0\dot{1}$

2.4 分数与小数运算

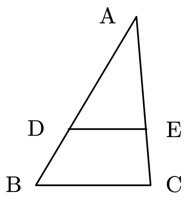
- 分数与小数运算时，可把小数化为分数然后运算，也可把分数化成<u>有限小数</u>然后运算（如果分数只能化成无限循环小数，则不能把分数化成小数进行计算），具体看哪种方法计算简单，如$\frac{3}{4}\times(2.5-\frac{1}{4})+\frac{5}{12}\div0.25=\frac{3}{4}\times(\frac{\cancel{25}\ 5}{\cancel{10}\ 2}-\frac{1}{4})+\frac{5}{12}\div\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\times(\frac{5}{2}-\frac{1}{4})+\frac{5}{\cancel{12}\ 3}\times\cancel{4}=\frac{3}{4}\times(\frac{10}{4}-\frac{1}{4})+\frac{5}{3}=\frac{3}{4}\times\frac{9}{4}+\frac{5}{3}=\frac{27}{16}+\frac{5}{3}=\frac{27\times3}{16\times3}+\frac{5\times16}{3\times16}=\frac{81}{48}+\frac{80}{48}=\frac{161}{48}=3\frac{17}{48}$
- $\frac{1}{2}=0.5$，$\frac{1}{4}=0.25$，$\frac{3}{4}=0.75$，$\frac{1}{5}=0.2$，$\frac{2}{5}=0.4$，$\frac{3}{5}=0.6$，$\frac{4}{5}=0.8$，$\frac{1}{8}=0.125$，$\frac{3}{8}=0.375$，$\frac{5}{8}=0.625$，$\frac{7}{8}=0.875$

3 比和比例

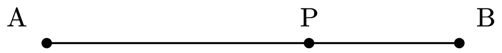
3.1 比

- 两项比：比大小的方法是÷，前项 : 后项 = 前项 ÷ 后项 = $\frac{前项}{后项}$=比值，如 5 : 10（读 5 比 10）= $\frac{5}{10}$，注意：前项和后项的单位必须相同，<u>求比则结果是前：后（无单位），求比值则结果是数字（可分数）</u>
- 性质 1：$a:b:c=am:bm:cm=(a\div m):(b\div m):(c\div m),b\neq0,m\neq0$
- 性质 2：如果$a:b=m:n$（把b放大到n）, $b:c=n:k$（把b放大到n）, 则$a:b:c=m:n:k$
- 最简整数比：18s : 1min = 18s : 60s = （18÷6）:（60÷6）=3 : 10，前项和后项都放大或缩小相同倍数，化简为互素整数后，比的结果不变，但能更直观看出大小差异
- 多项比：多项比大小，如小海、小华、乐乐身高分别是 1.63m、1.50m、1.55m，则三人身高最简整数比为 163:150:155
- 已知 a:b=2:3，b:c=4:5，求 a:b:c？解：3 和 4 的最小公倍数是 12，所以 a:b=2:3=8:12，b:c=4:5=12:15，所以 a:b:c=8:12:15

- 成比例：比值相同的各组对象，叫成比例，如$a:b=c:d=\text{相同比值}$，则a,b,c,d成比例，例如 20：8=10：4=$\frac{5}{2}$，因此 20、8、10、4 成比例，如果$a:b=c:d$，即$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，方程两边$\times bd$，则$ad=bc$；反之，如$ad=bc$，方程两边$\div bd$，则$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，即$a:b=c:d$，如判断 30、25、12、10 是否成比例？因为 30×10=25×12，所以 30:25=12:10



- 合比公式：如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，则$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$，或$\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$，即$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$，$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$，如$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$，则$\frac{AD+DB}{DB}=\frac{AE+EC}{EC}$，即$\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{EC}$
- 等比公式：如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$，则$\frac{a+c}{b+d}=\frac{bk+dk}{b+d}=k=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$
- 比例中项：如果$a:b=b:d=\text{相同比值}$，则a,b,b,d成比例（即 a 和 b 大小对比，与 b 和 d 大小对比相同），b 是 a、d 的比例中项，$b^2=ad$，例如 144：96=96：64=$\frac{3}{2}$，96 是 144 和 64 的比例中项



- 黄金分割点：如 AB：AP=AP：PB，则点 P 称为黄金分割点，$\frac{AP}{AB}=0.618$称为黄金分割数
- 比例尺：地图距离:实际距离=比例尺，如地图上 3.4cm，实际距离 6.8km，则比例尺=3.4cm:6.8km=34cm:6800000cm=1:200000，即把一个对象放大或缩小到 1，另一个对象放大或缩小同样倍数后的大小是比例尺
- 某顾客买了 6kg 牛肉，付款 406.8 元，按照如此售价，339 元可以购买多少牛肉？设可购买$x$kg 牛肉，由于重量和钱的比值是固定的，因此$\frac{406.8}{6}=\frac{339}{x}$，所以$x=\frac{339\times 6}{406.8}=5kg$，也可以认为钱和钱的比值=重量和重量的比值，因此$\frac{406.8}{339}=\frac{6}{x}$

3.2 百分数

- 百分数：把一个数写成$\frac{n}{100}$的形式，并简写为$n\%$，叫百分比/百分数/百分率，如 <u>1 写成 100%</u>，0.18 写成 18%，读成百分之 18。把$\frac{17}{20}$，$\frac{23}{25}$，$\frac{42}{50}$，分别写成$\frac{85}{100}$，$\frac{92}{100}$，$\frac{84}{100}$，由于分母都是 100，能直观比较大小
- 百分数、分数、小数互化：0.48=0.48×100%=48%（小数化成百分数时，把小数点右移两位并加上百分号），$75\%=\frac{75}{100}=0.75$（百分数化成小数时，把小数点左移两位并去掉百分号），$\frac{4}{5}=0.8=80\%$（分数先化成小数，再化成百分数），无特殊说明时，百分数精确到 0.1%
- 百分数应用题：
  - ✧ 占比率=$\frac{\text{部分量}}{\text{整体量}}\times 100\%$，如合格率=$\frac{\text{合格产品数}}{\text{产品数}}\times 100\%$，出勤率=$\frac{\text{全部出勤人数}}{\text{全班人数}}\times 100\%$，及格率=$\frac{\text{及格人数}}{\text{全班人数}}\times 100\%$，税率=$\frac{\text{应缴税额}}{\text{收入}}\times 100\%$，如企业这个月收入 100 万元，税率 2%，应交税

$=100\times 2\%=2$ 万元，月利率 $=\frac{月利息}{本金}\times 100\% = \frac{月本利和-本金}{本金}\times 100\%$，年利率 $=\frac{年利息}{本金}\times 100\% = \frac{年本利和-本金}{本金}\times 100\%$，利息=本金×利率× *存期*，如年利息=本金× *月利率* × 12

✧ 变化率 $=\frac{变化量（如增加量、减少量）}{原来量}\times 100\% = \frac{新的量-原来量}{原来量}\times 100\%$，如成本降低率 $=\frac{新成本-原成本}{原成本}\times 100\%$，销售增长率 $=\frac{新销量-原销量}{原销量}\times 100\%$，盈利率/利润率 $=\frac{售价-成本或进价}{成本或进价}\times 100\%$

✧ 注意：价格打九折就是价格×90%，八五折是价格×85%；1 个百分点就是 1%；<u>**"问 A 比 B 增加/减少了百分之几"，则比字后的 B 为原来量（做分母）**</u>

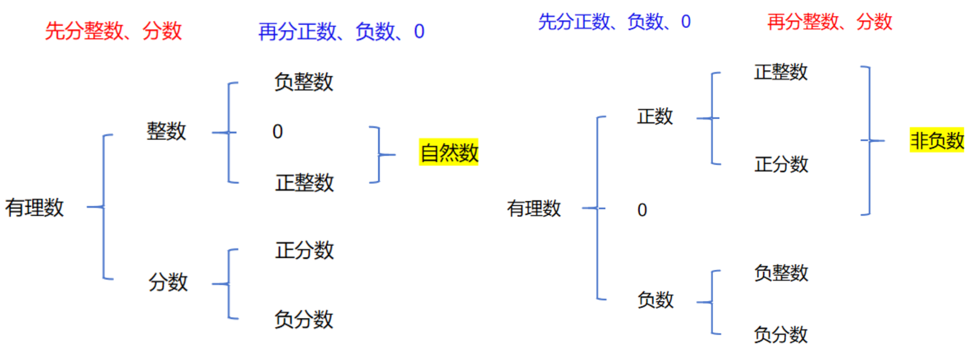
✧ 例题 1：生产成本是 10 万元/吨，现在降为 5 万元/吨，则成本变化率 $=\frac{新成本-原成本}{原成本}\times 100\% = \frac{5-10}{10}\times 100\% = -50\%$，即成本减少了 50%

✧ 例题 2：商店以每件 200 元的进价购得一批衬衫，以每件 280 元的售价卖出，则利润率 $=\frac{售价-进价}{进价}\times 100\% = \frac{280-200}{200}\times 100\% = 40\%$

✧ 例题 3：如果一年期利率为 1.65%，如果 1000 元先存一年，然后取出利息和本金，然后再存两年，则两年后可取出多少钱？答：先存一年，则一年后取出时利息为 1000×1.65%=16.5 元，本利和为 1016.5 元，再存两年，则能取出 1016.5×1.65%×2+1016.5=1033.27 元

4 有理数

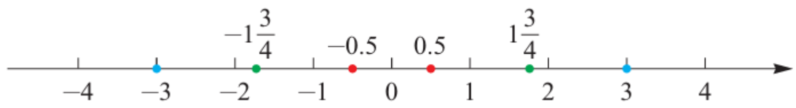
4.1 数的分类



- 正数、负数：表示意义相反的量，如零上 5 度写成+5（正 5，+号可省略），则零下 5 度写成-5（负 5）；赚钱写成+1000，亏损写成-1000
- 0：既不是正数，也不是负数
- 自然数：0 和正整数
- 非负数：0 和正数，比自然数多了正分数
- 有理数：能写成 $\frac{a}{b}$（a、b 为整数，b≠0）的数

4.2 有理数

- 数轴：规定了原点 0，正方向为右，单位长度为 1 的直线，每一个有理数都可以用数轴上唯一的一个点表示，表示正数的点都在原点的右边，表示负数的点都在原点的左边，原点表示 0，数轴上越靠右的数越大，越靠左的数越小



- 相反数：x 和 − x互为相反数，0 的相反数是 0，相反数在数轴上原点两侧，他们到原点距离相等
- 绝对值：3 和-3 到原点距离相同，距离是物理量，不为负，3 到原点距离是 3，而-3 到原点距离是-(-3)=3（负负得正），假如规定绝对值符号的规则是<u>|x|=x（x>0），|x|=0（x=0），|x|=-x（x<0）</u>，则无论 x 是正数还是负数，它到原点的距离都记作|x|（|x|肯定≥0），|0|=0 即 0 到原点距离是 0
- 有理数的大小：正数>0>负数；正数的绝对值越大，则正数越大；负数的绝对值越大，则负数越小

4.3 有理数运算

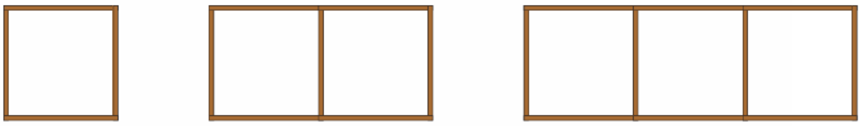
- 运算顺序：先算小括号，再算中括号，最后算大括号；同级则先乘方，后乘除，再加减
- 加减：10-15 可看成 10+(-15)，-15+10 可看成(-15)+10，因此可认为<u>有理数的减法是加上负数，即只有加法没有减法</u>
  - <u>有括号先去括号</u>：<u>括号前是+，则**去+**和括号，括号内不变</u>，+(-2+1)=-2+1；<u>括号前是-，则**去-**和括号，括号内每一项都变号</u>，-(-2+1)=+2-1，注意-(2-3)，2 前面省略了＋号，所以-(2-3)=-(+2-3)=-2+3
  - <u>正数+正数：符号为+，数字为两个数字相加</u>，+3+2=+（3+2）=+5
  - <u>负数+负数：符号为-，数字为两个数字相加</u>，-2-3=-（2+3）=-5，(-2)+(-3)=-(2+3)=-5
  - <u>正数+负数：符号为大数字的符号，数字为大数字-小数字</u>，2-3=-(3-2)=-1，-1+2=+(2-1)=+1
  - 正数+真分数：$100+\frac{2}{3}=100\frac{2}{3}$
  - 正数-真分数：$100-\frac{2}{3}=99+1-\frac{2}{3}=99+\frac{1}{3}=99\frac{1}{3}$（正数拿出 1，1-真分数简单，不要$100-\frac{2}{3}=\frac{300}{3}-\frac{2}{3}=\frac{298}{3}=99\frac{1}{3}$)
  - 负数-真分数：$-100-\frac{2}{3}=-(100+\frac{2}{3})=-100\frac{2}{3}$
  - 负数+真分数：$-100+\frac{2}{3}=-(100-\frac{2}{3})=-(99+1-\frac{2}{3})=-(99+\frac{1}{3})=-99\frac{1}{3}$
- 倒数：a≠0 时，a 的倒数是$\frac{1}{a}$，即互为倒数的两个数的积为 1，如-$\frac{3}{4}$的倒数是$-\frac{4}{3}$
- 乘除：先写出最终结果的符号（奇数个负数乘除则符号为-，偶数个负数乘除符号为+），然后去掉各数的负号和括号（都变成正数），再数字相乘（除法变乘以倒数$a\div b=a\times\frac{1}{b}$，任何数 × 0 = 0），如$(-3)\times(-2)\div(-\frac{1}{2})=-3\times2\times2=-12$，【3 个负数相乘，最终符号为-】
- 乘方：$a^n=a\times a\times\ldots\times a$（即 n 个 a 相乘），$a^n$称为 a 的 n 次方，也称为 a 的 n 次幂，a 称为底数（a≠0），n 称为指数，$a^1=a$，a^0=1，$0^n=0$；a 为正数时，$a^n>0$；a 为负数时，n 为偶数时$a^n>0$，n 为奇数时$a^n<0$，如$2^3=2\times2\times2=8$，$-1\times2^3=-2^3$，$-2^3=-2\times2\times2=-8$，$(-2)^3=(-2)\times(-2)\times(-2)=-8$，$-(-2)^3=-(-2)\times(-2)\times(-2)=-(-8)=8$，$(-2)^4=(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)=16$；分数的乘方，分数要加括号，如正确写法$(\frac{1}{2})^3=(\frac{1}{2})\times(\frac{1}{2})\times(\frac{1}{2})=\frac{1}{8}$，错误写法$\frac{1^3}{2}=\frac{1\times1\times1}{2}=\frac{1}{2}$
- 乘方数

	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	a^{10}
$a=2$	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
$a=3$	9	27	81	243					
$a=4$	16	64	256						
$a=5$	25	125							
$a=6$	36	216							
$a=7$	49								
$a=8$	64								
$a=9$	81								
$a=10$	100								
$a=11$	121								
$a=12$	144								
$a=13$	169								
$a=14$	196								
$a=15$	225								
$a=16$	256								
$a=17$	289								
$a=18$	324								
$a=19$	361								
$a=20$	400								

5 简单的代数式

5.1 代数式

- 代数式：用字母表示具体的数，有利于描述和研究问题，用若干+、-、×、÷、分号（如$\frac{1}{x}$）、乘方、开方、括号等运算符，连接字母和数字的式子叫代数式，没有运算符如 0、π、x、2a 也是代数式，而 x+1=2，x<3 不是代数式（=、<、>不是运算符）
- 书写规范：数与字母或字母与字母相乘时，×号可省略或用 • 表示，如 5×a 可以写成 5a 或 5 • a；字母和数字相乘时，数字写在字母前面，如写 4x，不写 x4；当数字是 1 或 − 1 时可省略，如$1\times \mathrm{x}$写成 x，$-1\times \mathrm{x}$写成-x；当数字是带分数时要写成假分数，如 $1\frac{1}{2}x$写成$\frac{3}{2}x$；运算结果不出现除号，一般用分数形式表示，如 x÷3 要写成$\frac{x}{3}$
- 例题：用大小相同的木棒搭正方形，搭 1 个正方形需要 4 根木棒，搭 2 个、3 个、4 个正方形分别需要几根木棒？搭 n 个正方形需要几根木棒？



解析：搭第一个正方形需要 4 根木棒，从第二个正方形开始，每增加一个正方形，所需木棒的根数增加 3，搭 n 个则需要 4+3(n-1)个木棒

5.2 一次式

- 代数式的值：用具体数值代替代数式里的字母（即代数），按照代数式中的运算关系计算得出的结果叫作代数式的值，如 x=-2，y=$-\frac{1}{2}$，求代数式$3\mathrm{x}^2-6\mathrm{xy}+4\mathrm{y}^2$的值，$3\mathrm{x}^2-6\mathrm{xy}+4\mathrm{y}^2=3\times(-2)^2-6\times(-2)\times(-\frac{1}{2})+4\times(-\frac{1}{2})^2=3\times4-6+4\times\frac{1}{4}=12-6+1=7$，注意：<u>代入负数、分数进行乘法、乘方运算时，要添加括号</u>
- 一次式：代数式 5x − 3y + 4 是 5x、− 3y 和 4 的和，5x、− 3y、4 称作代数式 5x − 3y + 4 的项，5x、− 3y 只含有一个字母，且字母的指数是 1，叫作一次项，不含字母的项叫作常数项，如+4，一次项中的数字叫作该一次项的系数，如 5x 中的 5，由一次项、常数项组成的代数式是一次式，字母相同的项叫作一次式的同类项，所有常数项都是同类项，同类项可以合并，合并时把系数相加，如 5x-3x=(5-3)x=2x
- 一次式加减：有理数的去括号、加减规则适用于一次式，如求 3x − 2y + 1 减去 x + y − 2 的差，几个一次式相加减，通常用括号把每个一次式括起来，再用加减号连接，因此(3x-2y+1)-(x+y-2)=3x-2y+1-x-y+2=3x-x-2y-y+1+2=2x-3y+3

- 数与一次式相乘：用这个数去乘一次式的每一项，再把所得的积相加，如 3(2x+1)-2(1-x)=3×2x+3×1-2×1-2×(-x)=6x+3-2+2x=8x+1

6 一元一次方程

6.1 一元一次方程

- 等式性质：如果 a=b，则 a+c=b+c，a-c=b-c，ac=bc，$\frac{a}{c}=\frac{b}{c}(c\neq 0)$
- 一元一次方程：含有未知数的等式是方程，未知数叫元，只含有一个未知数且未知数指数是 1 的方程叫作一元一次方程，一般形式为 ax=b（a≠0）
- 解方程：使方程左右相等的未知数的值叫方程的解，求解的过程叫解方程，解一元一次方程的步骤是先去括号，方程两边乘以或除以相同数（如为了去分母），移项（把一次项从方程右边移到左边，把常数项从左边移到右边，移项要变号），合并同类项，最后整理成 ax=b 形式，解为$x=\frac{b}{a}$，如$\frac{x+1}{0.3}-x=5$，为了计算简便，先把一次项的分子分母乘以 10，使分母变成整数，即$\frac{10(x+1)}{0.3\times 10}-x=5$，$\frac{10(x+1)}{3}-x=5$，为了计算简便，方程两边乘以 3 去分母，即$10(x+1)-3x=15$，10x+10-3x=15，移项变号，7x=15-10，7x=5，$x=\frac{5}{7}$

6.2 一元一次方程应用题

- 在解决应用问题的过程中，需要设适当的未知数，根据题意，列出一元一次方程，并求得方程的解

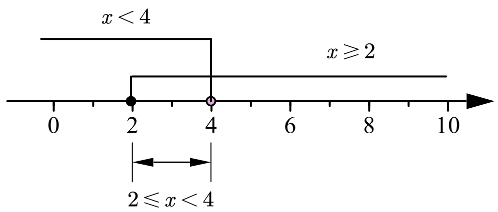
7 二元一次方程组

- 二元一次方程组：含有两个未知数且未知数最高次数为 1 的方程，叫二元一次方程，由两个二元一次方程组成的方程组，叫二元一次方程组，使得方程组中<u>每个方程左右相等的未知数的值</u>，是方程组的解，求解方法是消元，用代入或加减法去掉一个未知数，使二元一次方程变成一元一次方程
- 代入消元法：将一个未知数用另一个未知数表示并代入方程，如$\begin{cases}2x-3y=5①\\3x-4y=8②\end{cases}$，将方程①写成$x=\frac{3y+5}{2}$，然后代入方程②，得到$3\times\frac{3y+5}{2}-4y=8$，$y=1$，因此$x=\frac{3y+5}{2}=4$，方程组解为$\begin{cases}x=4\\y=1\end{cases}$
- 加减消元法：将一个方程两边分别乘以或除以相同数（方程解不变），然后将新方程与另一个方程加减（两个方程左边±左边，右边±右边），从而去掉一个未知数，如$\begin{cases}2x+3y=6①\\4x+5y=7②\end{cases}$，方程②*的* $4x$*是方程*①中 2x 的两倍，因此①$\times 2-$②*即可消去x，*①*左右两边*$\times 2$：4x+6y=12③，③-②（左边-左边=右边-右边）：(4x+6y)-(4x+5y)=12-7，y=5，代入①，2x+3×5=6，x=$-\frac{9}{2}$，方程组解为$\begin{cases}x=-\frac{9}{2}\\y=5\end{cases}$
- 三元一次方程组：由三个一元一次方程组成的方程组，解法是通过代入或加减法，<u>消掉一个相同元如 z，得到两个只含 x、y 的二元一次方程组</u>，如$\begin{cases}x-y+z=0①\\x+y+z=-4②\\9x+3y+z=0③\end{cases}$，可以看出①-②，可以消去 x、z，得到 y=-2，代入①和③，得到$\begin{cases}x+z=-2⑤\\9x+z=6⑥\end{cases}$，⑤-⑥可消去 z，得到 x=1，代入⑤，得到 z=-3，因此方程组解为$\begin{cases}x=1\\y=-2\\z=-3\end{cases}$

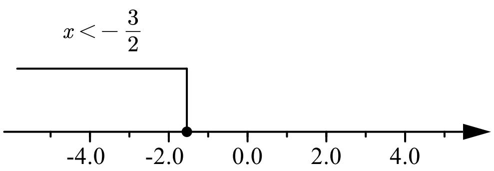
8 一元一次不等式组

8.1 一元一次不等式

- 不等式：=连接的式子是等式，>≥<≤连接的式子是不等式
  - 给定数 a、b，a>b，a<b，a=b 三种情形，有且仅有一种存在
  - 如果 a>b，b>c，则 a>c，对于≥<≤也存在这样的传递性
  - 不等式两边同时加、减一个数，不等号的方向不变，如 x<3，则 x+1<3+1，x-1<3-1
  - 不等式两边同时乘以或除以一个正数，不等号的方向不变，如 x<3，则 2x<6
  - 不等式两边同时乘以或除以一个负数，不等号的方向改变，如 x<3，则-2x>-6
  - 不等式一项从不等式的一边移到另一边，该项符号要变号，如$x-5<6$，$x<6+5$，$x<11$
- 一元一次不等式：只有一个未知数且未知数次数最高为 1 的不等式，是一元一次不等式，使不等式成立的未知数的所有值，构成不等式的解集，解集可用数轴表示，其中实心点包含该数，空心点不包含该数

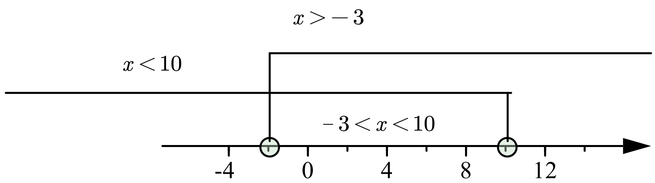


- 解一元一次不等式：化简不等式（去分母、去括号、移项、合并同类项）成 ax＞b（或 ax＜b）形式，然后两边除以 a，得到不等式的解集并在数轴上表示（注意，a＜0 时不等号变号），如$\frac{2x-5}{16}\geq\frac{4x+3}{2}+1$，两边乘以 16 去分母，2x-5≥8(4x+3)+16，去括号，2x-5≥32x+24+16，合并同类项，2x-5≥32x+40，将未知数移到左边，常数移到右边，移项要变号，2x-32x≥40+5，合并同类项，-30x≥45，两边除以-30，不等号变号，x≤$-\frac{3}{2}$，



8.2 一元一次不等式组

- 一元一次不等式组：由几个一元一次不等式组成的不等式组，所有不等式的解集的公共部分就是不等式组的解集，先求出不等式组中各个不等式的解集，并分别在数轴上表示出来，从数轴上找出各解集的公共部分，得到不等式组的解集，如$\begin{cases}4x>2x-6①\\10+3x>7x-30②\end{cases}$，①的解集是 x>-3，②的解集是 x<10，在数轴上分别表示出来，不等式组的解集是公共部分-3<x<10，



9 整式

9.1 整式

- 代数式包括整式（分母中无字母）、分式（分母中有字母）
- 单项式：运算符只有乘号、乘方、开方且分母中无字母的代数式，如$-\frac{1}{2}a^2$、$\frac{1}{5}$、c、ab^3，单项式中的数字是系数，所有字母的指数之和是次数，纯数字单项式的次数是 0，如单项式$-\frac{5x^4y^2}{11}$的系数是$-\frac{5}{11}$，次

数是 4+2=6，如单项式$\frac{1}{5}$的系数是$\frac{1}{5}$，次数是 0

- 同类项：字母相同且相同字母的指数也相同，这样的单项式是同类单项式，如$2a^2b^2$和$-3b^2a^2$是同类项，而$3x^2y$ 和 $2y^2x$ 不是同类项
- 整式：1 个或多个单项式加减构成整式，每个单项式是整式的一项，该单项式是几次，它就是整式的几次项，纯数字单项式是常数项，将整式中的各单项式按某个字母的次数排序，如该字母次数越小的单项式放在前，则是升幂排列，如该字母次数越大的单项式在前，则是降幂排列，如整式$3+6x^2y^3-2xy^4-5x^3y-4x^4y^2$，按 x 升幂排列是$3-2xy^4+6x^2y^3-5x^3y-4x^4y^2$，按 y 降幂排列是$-2xy^4+6x^2y^3-4x^4y^2-5x^3y+3$，当整式中无同类项时，单项式数量是整式的项数，次数最高单项式的次数，是整式的次数，如$x^4-x^2y+x^2y^3-y^3$，该整式没有同类项，次数最高单项式是x^2y^3，它的次数是 5，有 4 个单项式，所以该整式是 5 次 4 项式
- 整式恒等定理：不论 x 取何值，两个整式的值都相等的前提是，两个整式的同类项系数相等，如无论 x 取何值，$a_1x^2+a_2x+a_3=b_1x^2+b_2x+b_3$，则$a_1=b_1$，$a_2=b_2$，$a_3=b_3$
- 整式加减：先去括号，然后合并所有同类单项式，同类项合并时字母和指数不变，系数加减，如$\frac{3}{2}x^2y-\frac{2}{3}x^2y-z^4+\frac{1}{6}yx^2+z^4=(\frac{3}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{6})x^2y+(1-1)z^4=x^2y$
- 乘方公式：m、n 为有理数（即整数、分数，当非整数时需 a>0，b>0）：$(a^m)^n=a^{mn}$，$(abc)^n=a^nb^nc^n$，$(\frac{a}{b})^n=\frac{a^n}{b^n}$，$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$(切记：$a^m+a^n\neq a^{m+n}$)，$a^m\div a^n=a^{m-n}$(*须底数a相同*)，$a^{m^2}=a^{mm}=(a^m)^m\neq a^{2m}$，注意所有公式左=右，同时右=左，如$a^{m+n}=a^m\cdot a^n$，如$5^{\frac{2}{3}}\times 5^{\frac{1}{2}}=5^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}=5^{\frac{7}{6}}$，$(8^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{4}}=8^{-\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}}=8^{-\frac{1}{6}}$
- 整式乘除：整式相乘，先用一个整式的每一项乘另一个整式中的每一项（使用乘方公式），再把积相加，

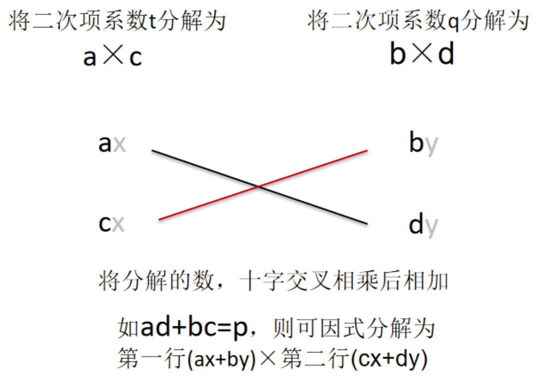
$$(a+b)\cdot(m+n)=am+an+bm+bn.$$

然后合并同类项。整式除以单项式，先用整式每一项除以单项式（使用乘方公式），再把商相加，然后合并同类项。如$(-\frac{2}{3}x^2y^3+\frac{3}{4}xy^2)(-2x^2y+xy^2)\div(-\frac{1}{2}xy)=(\frac{4}{3}x^4y^4-\frac{2}{3}x^3y^5-\frac{3}{2}x^3y^3+\frac{3}{4}x^3y^4)\div(-\frac{1}{2}xy)=-\frac{8}{3}x^3y^3+\frac{4}{3}x^2y^4+3x^2y^2-\frac{3}{2}x^2y^3$
- 乘法公式：平方差公式$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$，如$(\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y)(\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}y)=(\frac{1}{2}x)^2-(\frac{2}{3}y)^2=\frac{1}{4}x^2-\frac{4}{9}y^2$，如 $101\times 99=(100+1)(100-1)=100^2-1^2=9999$，完全平方公式$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$，$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$，如 $98^2=(100-2)^2=100^2-2\times 100\times 2+2^2=10000-400+4=9604$

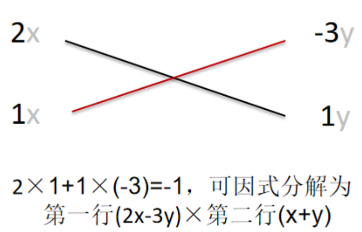
9.2 因式分解

- 因式分解：如果整式 A、B、C 都含有 x，A=B×C，即把整式 A 写成几个次数更低的整式 B、C 的积，叫因式分解，B、C 是 A 的因式。因式分解一般要分解到每个因式都不能再分解为止，如$x^4-1=(x^2+1)(x^2-1)=(x^2+1)(x+1)(x-1)$。

- 因式分解的意义：使因式 B、C=0 的 x 值，也会使 A=0，如$x^2-1=(x+1)(x-1)$，*如*$x+1=0$，*即*$x=-1$，*则*$x^2-1=0\times(x-1)=0$，*同理*$x=1$，*则*$x^2-1=(x+1)\times 0=0$，*所以让因式*$=0$ *的*x*值，也会让整式*$=0$，*因此因式*$=0$ *的解，也是整式*$=0$ *的解*。由于因式中 x 的次数肯定小于整式中 x 的次数，所以求因式的解比求整式的解更简单，这是解整式方程的主要思路。
- 提取公因式法：提取整式中各单项式的共同因式，如$\mathrm{x(a-b)^2-y(b-a)^3=x(b-a)^2-y(b-a)^3=(b-a)^2(x-by+ay)}$
- 乘法公式法：反向使用平方差公式$\mathrm{a^2-b^2=(a+b)(a-b)}$、完全平方公式$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$，$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$，如$(x+y)^2+8(x+y)+16=(x+y+4)^2$
- 十字相乘法：因为$(ax+by)(cx+dy)=acx^2+(ad+bc)xy+bdy^2$，如整式$tx^2+pxy+qy^2$，t 能分解成 a×c，q 能分解成 b×d，而 p 能分解成 ad+bc，则$\mathrm{t}x^2+pxy+qy^2$能因式分解$(ax+by)(cx+dy)$，



，如 $\mathrm{2x^2-xy-3y^2}$，



，

因此$\mathrm{2x^2-xy-3y^2=(2x-3y)(x+y)}$

- 分组法：将所有单项式分为几组，各组内部先因式分解，然后各组之间因式分解，如$\mathrm{9a^2-3a+b-b^2=9a^2-b^2-3a+b=(3a-b)(3a+b)-(3a-b)=(3a-b)(3a+b-1)}$

10 分式

10.1 分式

- 分式：<u>分母中有字母的代数式，当字母的值让分母为 0，则分式无意义</u>，如分式$\frac{1}{x}+1$，当 x=0 时无意义
- 性质：$\frac{A}{B}=\frac{A\times K}{B\times K}=\frac{A\div K}{B\div K}$（A、B、K 都是整式，K≠0），即分式的分子、分母都乘以或除以相同的整式，分式值不变
- 最简分式：分式的分子、分母可分别因式分解，然后分子、分母的公因式可以约分，当分子、分母没有公因式时，是最简分式，如$\frac{x^2-x-6}{x^2-9}=\frac{(x-3)(x+2)}{(x+3)(x-3)}=\frac{x+2}{x+3}$
- 分式乘除：$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{A\times C}{B\times D}$，$\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}=\frac{A\times D}{B\times C}$，注意，结果要化为最简分式，如$\frac{2a-b}{a^2-2ab+b^2}\div\frac{4a^2-b^2}{ab^2-a^2b}=\frac{2a-b}{(a-b)^2}\times\frac{ab^2-a^2b}{4a^2-b^2}=\frac{2a-b}{(a-b)^2}\times\frac{ab(b-a)}{(2a-b)(2a+b)}=\frac{\cancel{2a-b}}{\cancel{(b-a)}^2}\times\frac{ab\cancel{(b-a)}}{\cancel{(2a-b)}(2a+b)}=\frac{ab}{(b-a)(2a+b)}$
- 分式加减：$\frac{B}{A}\pm\frac{C}{A}=\frac{B\pm C}{A}$，异分母的分式加减要先通分（公分母为所有分母的最小公倍式），如$\frac{y}{2x}+\frac{x}{y}-\frac{2x-1}{y^2}=\frac{y\times y^2}{2x\times y^2}+\frac{x\times 2xy}{y\times 2xy}-\frac{(2x-1)\times 2x}{y^2\times 2x}=\frac{y^3}{2xy^2}+\frac{2x^2y}{2xy^2}-\frac{4x^2-2x}{2xy^2}=\frac{y^3+2x^2y-4x^2+2x}{2xy^2}$

- $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$， $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\ldots+\frac{1}{99\times100}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}=1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}$
- 假设 $\frac{1}{n(n+2)}=x(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})=x\frac{n+2-n}{n(n+2)}=\frac{2x}{n(n+2)}$，因此 $x=\frac{1}{2}$，即 $\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})$， $\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\ldots+\frac{1}{97\times99}=\frac{1}{2}(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{97}-\frac{1}{99})=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{99})=\frac{49}{99}$

10.2 分式方程

- 分式方程：分母含有未知数的方程是分式方程（分母不含未知数的方程是整式方程），分式方程的解法是方程两边乘以公分母，从而约分去掉分母，化为整式方程，求出解后要验根，舍去使分母为 0 的增根，如$\frac{x}{x-1}+1=\frac{1}{x-1}$，方程两边乘以 x-1，$\frac{x(x-1)}{x-1}+(x-1)=\frac{x-1}{x-1}$，$x+x-1=1$，x=1，代入方程验算，因为 x=1 使得分母为 0，故舍去，方程无解

11 实数

11.1 开平方

- $x^2=4$，则 x 是 4 的平方根或二次方根，求 4 的平方根叫对 4 开平方
- <u>正数有两个平方根</u>，4 的平方根是$\sqrt{4}$=2 和$-\sqrt{4}$=-2，$\sqrt{4}$是算术平方根，$-\sqrt{4}$是负平方根
- 0 的平方根是 0，即$\sqrt{0}=0$
- <u>负数无平方根</u>，如-4 无平方根，即没有 x，使得$x^2=-4$

11.2 开立方

- $x^3=-8$，则 x 是-8 的立方根或三次方根，求-8 的立方根叫对-8 开立方
- <u>正数或负数都有一个立方根</u>，-8 的立方根是$\sqrt[3]{-8}=-2$
- 0 的立方根是 0，即$\sqrt[3]{0}=0$
- <u>$\sqrt{2}\approx1.414$，$\sqrt{3}\approx1.732$，$\sqrt{5}\approx2.236$</u>

11.3 开方

- a 称为a^n的 n 次方根，$\sqrt[m]{a^n}$读作 a 的 n 次方的 m 次方根，$a=\sqrt[n]{a^n}$(n 为奇数)，$a=\pm\sqrt[n]{a^n}$(n 为偶数)，a^n是被开方数，n 是根指数
- m、n 为正整数（n>1，a>0）：$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$，$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$，$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$，$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$，如 $\sqrt{18}\div\sqrt[3]{2}=\sqrt{9\times2}\div\sqrt[3]{2}=\sqrt{9}\times\sqrt{2}\div\sqrt[3]{2}=3\sqrt{2}\div\sqrt[3]{2}=3\times2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}=3\times2^{\frac{1}{6}}=3\sqrt[6]{2}$

11.4 实数

- 实数包括有理数、无理数，所有实数可用数轴上一个点表示，数轴上每个个点就是一个实数
- 有理数：0、正负有限小数、正负无限循环小数（有限小数、无限循环小数可以写成分数$\frac{a}{b}$，a、b 为整数）
- 无理数：正负无限不循环小数，如π（无限不循环小数不能写成分数$\frac{a}{b}$，a、b 为整数）
- 实数运算：所有规则和有理数一样（包括绝对值），运算顺序先括号，<u>括号内乘方/开方，再乘除，最后加减</u>，<u>如果题目要求计算结果保留若干位小数，则无理数取近似小数计算，否则保留无理数</u>

11.5 科学计数法

- 很大的数如-320000000，可写成-3.2×10^8；很小的数如-0.0000000019，可写成-1.9×10^{-9}，从而节约空间且不易写错
- 科学计数法：$a\times10^n$，$1\le|a|<10$，a 是整数或小数，n 为整数，a=1 或-1 时，可省略 a

- 已知数字，写成科学记数法：小数点从现在的位置向左移动 n 位，直到小数点左边的数字在 1 ≤ a < 10 或 -10 < a ≤ -1 之间，如-39889.23=-3.988923$\times 10^4$（小数点向左移动了 4 位）
- 当原来的数较大时，n 表示原数小数点左边有 n+1 个数字（整数位）
- 当原来的数较小时，n 表示原数从小数点向右到第一个非 0 数字之间有 n 个数字

11.6 近似数

- 准确数：完全准确，符合实际的数
- 近似数（近似值）：与准确数接近到一定程度的数，近似数的近似程度叫精确度，精确度有两种：
- 精确到某位：精确到哪位，该位就是要保留的最后一个数字，如果要求精确到十位及以上位时，如 13500 精确到千位，则只能保留万位和千位两个数字，而百位四舍五入，因此千位变成 4，只能留下 14 两个数字，因此要么后面加单位，如 1.4 万，要么用科学计数法写成1.4×10^4；如果要求精确到个位或小数位，则可以不加单位，不用科学计数法，如 π精确到百分位，四舍五入为 3.14
- 保留几个有效数字：从左边第一个不是 0 的数字起，往右直到末位数字的所有数字是有效数字，如果保留的最后一位有效数字是十位及以上位时，需要加单位或用科学计数法表示，如 3485.26 保留三个有效数字，则保留到十位，个位四舍五入，保留的数字为 349，可加单位即 0.349 万，或用科学计数法 3.49×10^3；如果保留的最后一个有效数字是个位或小数位，则可以不加单位，不用科学计数法，如 π 保留五个有效数字，四舍五入为 3.1416

12 二次根式

12.1 二次根式

- 含有根号的代数式称为根式，只含有平方根（二次方根）的代数式称为二次根式
- $\sqrt{x}$有意义的前提是 x≥0
- $(\sqrt{x})^2 = x$，x≥0
- $\sqrt{x^2} = |x|$，（因为$x^2 \geq 0$，*所以*$\sqrt{x^2}$*总是有意义，且*$\sqrt{\ }$*是算数平方根，一定*≥ 0）
- $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$，a≥0，b≥0
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$，a≥0，b>0

12.2 最简二次根式

- 最简二次根式：根号内各因式、素因数的指数为 1，且根号内无分母或分母无根号，如$\sqrt{42a} = \sqrt{2 \times 3 \times 7 \times a}$*,根号内因式*$a$*和各素因数的指数都是* 1，*所以是最简二次根式*
- 将二次根式化简为最简二次根式的方法：
  - 将$\sqrt{\ }$*内的完全平方素因数、完全平方因式，移到*$\sqrt{\ }$*外*，如$\sqrt{18} = \sqrt{2 \times 3^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{3^2} = 3\sqrt{2}$
  - 将$\sqrt{\ }$内的分母去掉或移到$\sqrt{\ }$外，如$\sqrt{\frac{b^2}{9a}}$，*因为二次根式有意义，所以*$a > 0$，*所以*$\sqrt{\frac{b^2}{9a}} = \sqrt{\frac{b^2 \cdot a}{9a^2}} = \frac{|b|\sqrt{a}}{3a}$
  - 将分母的$\sqrt{\ }$去掉（即分母有理化），如$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$，$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$，其中$(\sqrt{3}+\sqrt{2})$*和*$(\sqrt{3}-\sqrt{2})$互为有理化因式，即两个二次根式相乘后不再含有根号
- 同类二次根式：如果两个最简二次根式的根号内相同，则它们是同类二次根式
- 二次根式运算：先化简各二次根式，然后合并同类二次根式并化简，注意$3\sqrt{2} = 3 \times \sqrt{2}$，$3\frac{1}{\sqrt{2}} = 3 + \frac{1}{\sqrt{2}}$

13 一元二次方程

13.1 一元二次方程的一般形式

- 只有一个未知数且未知数的最高次数是 2 的整式方程：$\mathrm{ax^2+bx+c=0}$，$\mathrm{ax^2}$是二次项，a 是二次项系数（a≠0），bx 是一次项，b 是一次项系数，c 是常数项，最多有两个实数x_1、x_2，是方程的实数根或根

13.2 一元二次方程的解法

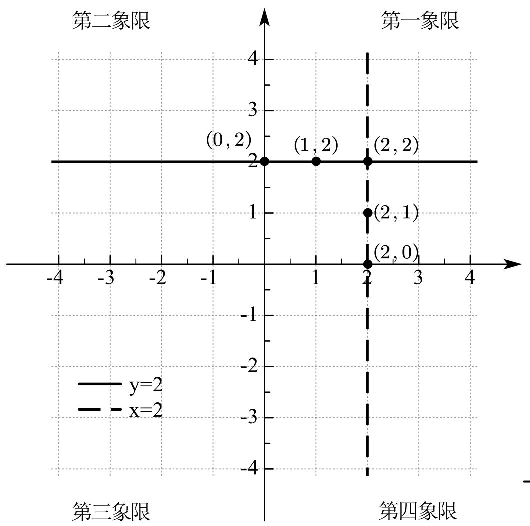
- 因式分解法：将一元二次方程因式分解为两个一次因式相乘=0，如 3(x-2)=5$(x-2)^2$，因式分解为：(x-2)(3-5x+10)=0，(x-2)(13-5x)=0，因此 x-2=0 或 13-5x=0，因此$x_1=2$，$x_2=\frac{13}{5}$
- 开方法：形如$ax^2+c=0$的一元二次方程，变形为$x^2=-\frac{c}{a}$，如果$\frac{c}{a}<0$，方程有两个实根$x_1=\sqrt{-\frac{c}{a}}$，$x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}}$；如果 c=0，方程有一个实根 0；如果$\frac{c}{a}>0$，方程无实根。如$(x+5)^2=12$，则$\mathrm{x}+5=\pm2\sqrt{3}$，$x_1=-5+2\sqrt{3}$，$x_2=-5-2\sqrt{3}$
- 配方法：将方程写成左边为完全平方整式，右边为常数，然后使用开方法，如$x^2-2x=4$，$x^2-2x+1=4+1$，$(x-1)^2=5$，$\mathrm{x}-1=\pm\sqrt{5}$，$\mathrm{x}=1\pm\sqrt{5}$
- 公式法（求根公式）：$ax^2+bx+c=0$的一元二次方程一般形式（a≠0），变形为$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$，$x^2+2\times\frac{b}{2a}x+(\frac{b}{2a})^2=(\frac{b}{2a})^2-\frac{c}{a}$，$(x+\frac{b}{2a})^2=(\frac{b}{2a})^2-\frac{c}{a}$，$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$，$\Delta=b^2-4ac$是一元二次方程的判别式，如果$\Delta>0$，有两个不同实根，$\mathrm{x}+\frac{\mathrm{b}}{2\mathrm{a}}=\pm\frac{\sqrt{\mathrm{b}^2-4\mathrm{ac}}}{2\mathrm{a}}$，$\mathrm{x}=\frac{-\mathrm{b}\pm\sqrt{\mathrm{b}^2-4\mathrm{ac}}}{2\mathrm{a}}$；如果$\Delta=0$，有相同的实根（重根），$\mathrm{x}=-\frac{\mathrm{b}}{2\mathrm{a}}$；如果$\Delta<0$，无实根。如$\mathrm{y(y+4)=8}$，$\mathrm{y^2+4y-8=0}$，因为$\Delta=4^2-4\times1\times(-8)=48>0$，方程有两个不同实根，$\mathrm{y}=\frac{-4\pm\sqrt{48}}{2}=-2\pm2\sqrt{3}$
- 韦达定理：一元二次方程$ax^2+bx+c=0$（a≠0）两个实根$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$，$x_1=x_2$时也成立。如$2\mathrm{x}^2+6\mathrm{x}-3=0$，求$(x_1-x_2)^2$，而$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=9+4\times\frac{3}{2}=15$
- 二次三项式在实数范围的因式分解：如果二次三项式$ax^2+bx+c=0$，$a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})=a[x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2]=a(x-x_1)(x-x_2)$，因此如果二次三项式$\Delta\geq0$，则可因式分解为$a(x-x_1)(x-x_2)$，如果$\Delta<0$，则在实数范围无法因式分解。例如在实数范围因式分解$2x^2+4x-3$，因为$\Delta=16+4\times2\times3=40>0$，$x=\frac{-4\pm\sqrt{40}}{4}=-1\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$，所以$2x^2+4x-3=2(x+1-\frac{\sqrt{10}}{2})(x+1+\frac{\sqrt{10}}{2})$；如果是二次三项式$ax^2+bxy+cy^2=0$，$a(x^2+\frac{b}{a}xy+\frac{c}{a}y^2)=a[x^2-(x_1+x_2)xy+x_1x_2y^2]=a(x-x_1y)(x-x_2y)$
- 可化为一元二次方程的分式方程：先两边乘以分母最小公倍式，去所有分母，化为一元二次方程，求解后要验根（舍去使最小公倍式为 0 的增根），如$\frac{x}{x-1}=\frac{2}{(x-1)(x+1)}$，方程两边乘以最小公倍式(x-1)(x+1)，$\mathrm{x(x+1)}=2$，$x^2+x-2=0, x_1=-2, x_2=1$，由于$x_2=1$使得最小公倍式为 0，是增根，应舍去
- 一元二次方程应用题：列方程，判断是否有根，求出根后要舍去无意义的根。一条长 15km 道路，整治后车辆通行速度提高了 3km/h，车辆通过时间少 15 min，求整治后车辆通过时间是多少？设整治后通过

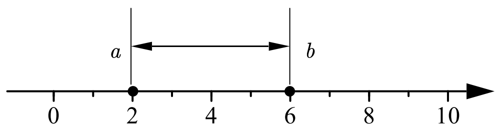
时间为 t 小时，列方程$\frac{15}{t}-\frac{15}{t+\frac{15}{60}}=3$，两边乘以$t(t+0.25)$，$5(t+0.25)-5t=t(t+0.25)$，$4t^2+t-5=0,\Delta=1+4\times4\times5=81>0,x=\frac{-1\pm9}{8},x_1=-\frac{5}{4}$，$x_2=1$，由于$x_1$为负数不符合实际意义，应舍去

14 平面直角坐标系

14.1 平面直角坐标系

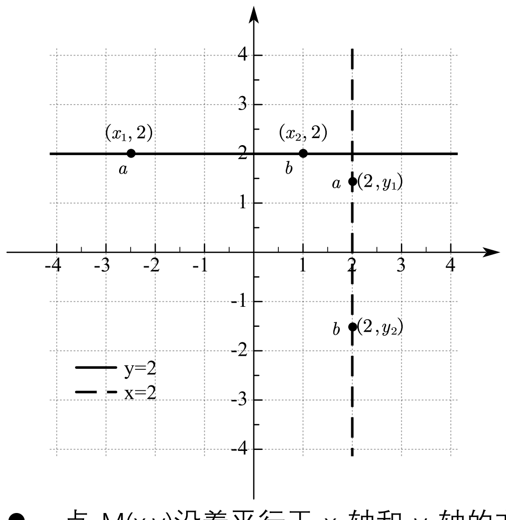
- 平面直角坐标系：在平面上经过点 O 做两条垂直直线，O 为坐标原点，横向数轴为坐标轴 x，向右为正，纵向数轴为坐标轴 y，向上为正，两条坐标轴将坐标系分成 4 个象限，每一个实数对(x,y)可用坐标系中的一个点(x,y)表示，(x,y)是点的坐标，x 是横坐标，y 是纵坐标
- 坐标轴 x 上的点，y=0；坐标轴 y 上的点，x=0；经过点(a,b)且垂直 x 轴的直线可表示为 x=a，该直线上所有点的 x=a；经过点(a,b)且垂直 y 轴的直线可表示为 y=b，该直线上所有点的 y=b

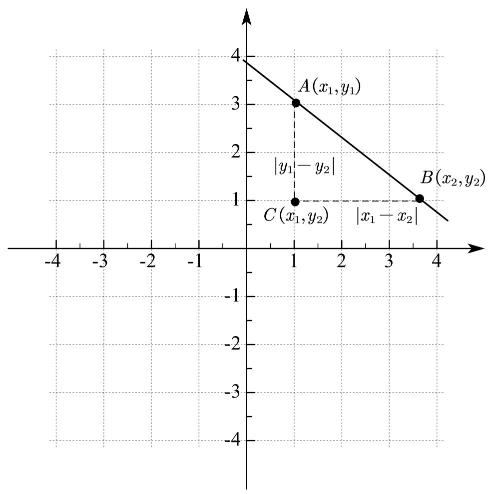




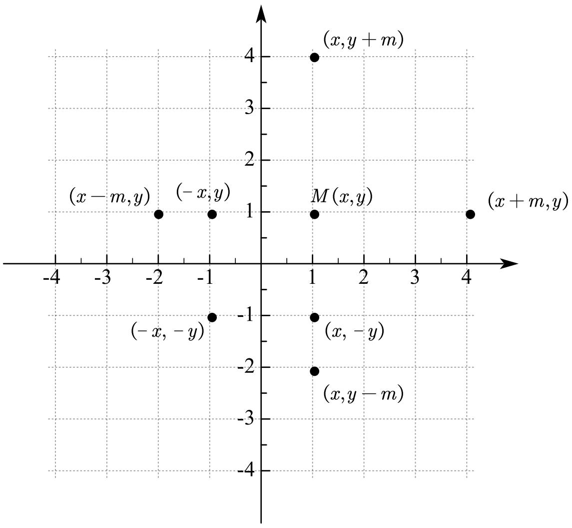
14.2 坐标系中点的运动

- 在数轴上，点 a 和点 b 的距离=|a-b|=|2-6|=4
- 在坐标系中，直线 y=2 上的点 a(x_1,2)和点 b(x_2,2)的距离=$|x_1-x_2|$，在直线 x=2 上的点 a(2,y_1)和点 b(2,y_2)的距离=$|y_1-y_2|$，根据勾股定理（直角三角形斜边的平方=两直角边的平方和），任意两点 A(x_1,y_1)，B(x_2,y_2)的距离为$AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$





- 点 M(x,y)沿着平行于 x 轴和 y 轴的方向平移 m 个单位长度（m>0），则向右平移的新坐标为(x+m,y)，向左平移的新坐标为(x-m,y)，向上平移的新坐标为(x,y+m)，向下平移的新坐标为(x,y-m)
- 点 M(x,y)关于 x 轴对称点的坐标(x,-y)，关于 y 轴对称点的坐标(-x,y)，关于原点对称点的坐标(-x,-y)



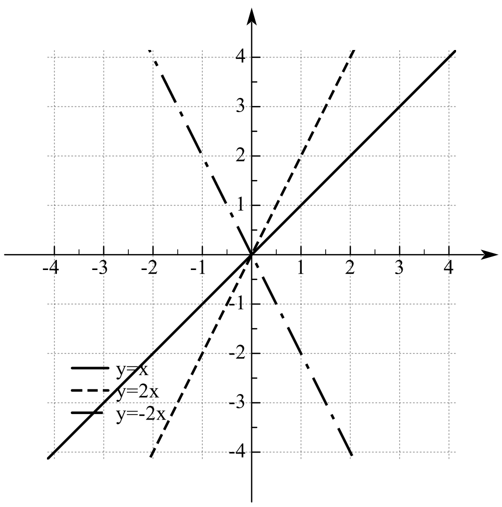
15 一次函数和正反比例函数

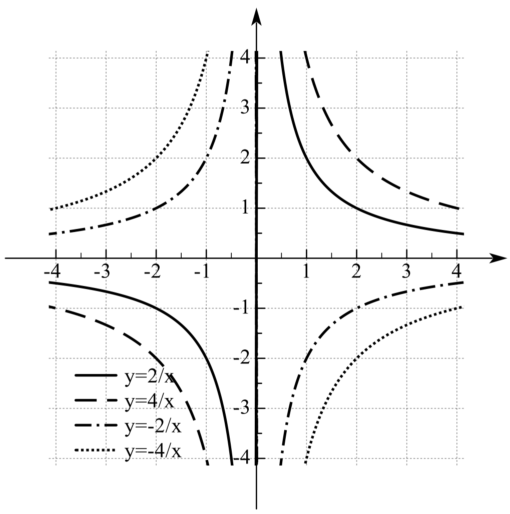
15.1 函数

- 函数：圆的面积公式$s=\pi r^2$，其中π是数值不变的常数，当 r 取一个值时，s 有对应的唯一值，r 称为自变量，s 称为因变量或函数，而$s=\pi r^2$是函数解析式（即公式），自变量 r 的允许取值范围叫函数的定义域，这里定义域是 r>0，一般用 f(x)代表自变量 x 的函数，x 是自变量，当自变量 x=a 时，函数值是 f(a)，如函数 $f(x)=\pi x^2$，x=2 时，$f(2)=\pi\times 2^2=4\pi$
- 常值函数：y=m，或 f(x)=m，即无论自变量 x 的值是多少，y 都等于固定值 m
- 函数表示法：函数的每个 x 值与对应 y 值都有相同计算公式时，函数可用解析式表示，有些函数的不同 x 值与对应 y 值的没有计算式，则函数用列表法、图像法等表示

15.2 正比例函数

- 正比例函数：y=kx，或 f(x)=kx，k 是不为 0 的常数，叫比例系数（斜率），x 是自变量，定义域是一切实数，例如正比例函数 f(x)=-4x，比例系数为-4，f(0)=-4×0=0，f(3)=-4×3=-12
- 正比例函数的图像：假如把 y=kx 的 x 和 y 看成是平面直角坐标系中的点(x,y)，可将每个 x 和对应 y 的点标出来，这些点连成了函数在坐标系上的图像，显示了每个 x 和 y 的位置，正比例函数 y=kx 的图像是经过原点(0，0)和点(1，k)的一条直线，该直线上的所有点符合 y(横坐标)=kx(纵坐标)，而 y=kx 的所有 x 和对应 y 的点(x,y)都在该直线上，可将该直线称为 y=kx





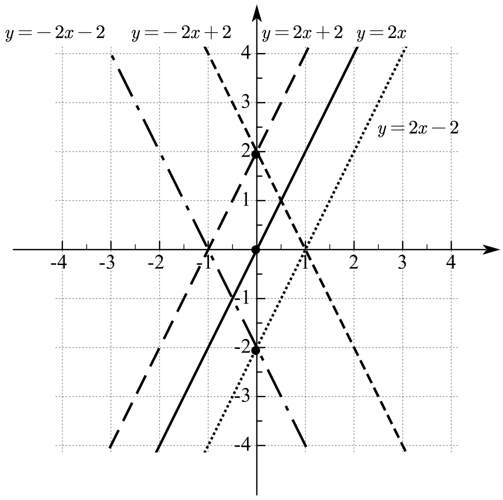
  - 当 k>0 时，图像经过第一、三象限，自变量 x 越大，y 也越大
  - 当 k<0 时，图像经过第二、四象限，自变量 x 越大，y 则越小（越负）

15.3 一次函数

- 一次函数：y=kx+b，或 f(x)=kx+b，k 和 b 是常数，k≠0，k 称为斜率，b 称为截距，x 是自变量，定义

域是一切实数，当 b=0 时，y=kx 即正比例函数，因此正比例函数是一次函数的特例

- 一次函数的图像：y=kx+b 的图像是一条经过点(0,b)和点($-\frac{b}{k}$,0)的直线，(0,b)是直线与 y 轴的交点，($-\frac{b}{k}$,0)是直线与 x 轴的交点（y=kx+b，令 y=0，则 x=$-\frac{b}{k}$）
- 斜率 k 相同的一次函数互相平行，如$y=\mathrm{kx}+\mathrm{b}_1$、$y=\mathrm{kx}+\mathrm{b}_2$、$y=\mathrm{kx}$三条直线平行，$b_1$、$b_2$、0是它们与 y 轴交点的纵坐标，y=kx 在 y 轴方向平移b_1个单位长度可得到 y=$\mathrm{kx}+\mathrm{b}_1$



  - ■ 当 k>0 时，自变量 x 越大，y 也越大
  - ■ 当 k<0 时，自变量 x 越大，y 则越小（越负）
  - ■ 当 k>0 且 b>0 时，直线在第一、二、三象限
  - ■ 当 k>0 且 b<0 时，直线在第一、三、四象限
  - ■ 当 k<0 且 b>0 时，直线在第一、二、四象限
  - ■ 当 k<0 且 b<0 时，直线在第二、三、四象限

15.4 反比例函数

- 反比例函数：$y=\frac{k}{x}$，k 是≠0 的常数，也叫比例系数，x 是自变量，定义域是≠0 的一切实数，例如反比例函数$f(x)=\frac{18}{x}$，比例系数是 18，f(2)=$\frac{18}{2}=9$
- 反比例函数的图像：列出若干个 x 值和 y 值，在坐标系中标出它们，然后用光滑线段连接，得到反比例函数的图像是两条曲线（双曲线）
  - ■ 当 k>0 时，两条曲线分别在第一、三象限，在每个象限内，自变量 x 越大，y 则越小
  - ■ 当 k<0 时，两条曲线分别在第二、四象限，在每个象限内，自变量 x 越大，y 也越大
  - ■ 两条曲线的两端都无限接近于 x 轴和 y 轴，但不会与 x 轴和 y 轴相交

16 代数式方程

16.1 整式方程

- 一元整式方程：包括一元一次、一元二次、一元高次（未知数次数≥3）整式方程，都含有一个未知数且方程两边是整式，如 3x+5=0，$x^2+x-2=0$，$x^3-10x^2+25x-12=0$，方程中各项的系数是数字，叫数字系数方程，其解法已学过，如果各项系数有字母（非未知数），则是字母系数方程，如(3a-2)x=2(3-x)，系数中含有字母 a
  - ■ 字母系数整式方程：解法同数字系数方程，解的过程中，如果方程两边除以带字母项时，要判断该项是否可能为 0，方程两边要开方时，要判断被开方数是否可能小于 0，解完要确定字母各取值范围的解，如(3a-2)x=2(3-x)，3ax=6，x=$\frac{2}{a}$，当 a≠0 时解为$\frac{2}{a}$，当 a=0 时，方程无解；如$\mathrm{ax}+\mathrm{b}^2=\mathrm{bx}+\mathrm{a}^2$，(a-b)x=$a^2-b^2$，(a-b)x=(a-b)(a+b)，如果 a-b≠0，即 a≠b，方程两边除以 a-b，x=a+b，

如果 a=b，则方程解为任意实数；如$bx^2-1=1-x^2$，(b+1)x^2=2，如果 b+1≠0，即 b≠-1，方程两边除以 b+1，$x^2=\frac{2}{b+1}$，如果 b+1>0，即 b>-1，$x=\pm\sqrt{\frac{2}{b+1}}$，因此如果 b>-1，x 解为$\pm\sqrt{\frac{2}{b+1}}$，如果 b≤-1，方程无解

- 一元高次二项方程：只有一个未知数项和一个常数项的一元高次方程，一般形式为$ax^n+b=0$（a≠0，b≠0，n 为正整数），$x^n=-\frac{b}{a}$，则如果 n 为奇数，则$x=-\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$，如果 n 为偶数，则当$\frac{b}{a}$≤0 时，$x=\sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$，当$\frac{b}{a}$>0 时，方程无解
- 双二次方程：只含有未知数 4 次和 2 次项的一元四次方程，一般形式为$ax^4+bx^2+c=0$（a≠0），可使用换元法将 4 次降到 2 次，$x^4+5x^2-24=0$，假设$y=x^2$，$y^2+5y-24=0$，(y-3)(y+8)=0，y=3 或-8，即x^2 =3 或-8，其中-8 舍去，$x^2=3$，$x=\pm\sqrt{3}$
- 一元高次方程：能使用因式分解法降次的高次方程，如$2x^3+x^2-6x=0$，$x(2x^2+x-6)=0$，$x(2x-3)(x+2)=0$，x=0 或-2 或$\frac{3}{2}$

16.2 分式方程

- 分式方程：之前方法是，方程两边乘以相同的整式，去掉分母，转化为整式方程，求解后要验根（包括使得两边乘以为 0 整式的增根，应用题无实际意义的根），除此之外，特殊的分式方程可使用换元法降次，如$\frac{2}{x^2}+x^2=3$，假设$y=x^2$，$\frac{2}{y}+y=3$，两边乘以 y，$2+y^2=3y$，$y^2-3y+2=0$，$(y-2)(y-1)=0$，y =2 或 1，$x^2=2$或 1，$x=\pm1$或$\pm\sqrt{2}$，经过检验没有增根

16.3 无理方程

- 无理方程：整式方程和分式方程统称有理方程，方程中含有根式且根号内有未知数的方程，是无理方程，将方程两边平方，可以去掉根号，转化为有理方程，求解后要验根（因为方程两边平方，去掉根号，但原本根号内必须≥0），如$\sqrt{x+2}-\sqrt{x}=1$，$\sqrt{x+2}=\sqrt{x}+1$，两边平方，$x+2=x+2\sqrt{x}+1$，$\sqrt{x}=\frac{1}{2}$，$x=\frac{1}{4}$，经检验，$\frac{1}{4}$是方程的根

16.4 二元二次方程组

- 二元二次方程：含有两个未知数且未知数最高次数为 2 的整式方程，一般形式是$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$
- 二元二次方程组：含有两个未知数，方程是整式方程，未知数最高次数为 2 的方程组，各方程的公共解是方程组的解，基本思路是消元法，先去掉一个未知数，求出另一个未知数，或用因式分解法从 2 次降为 1 次
  - 如果其中一个方程是二元一次方程，另一个是二元二次方程，则可使用代入消元法，将一个未知数用另一个未知数表示，然后代入二元二次方程，如$\begin{cases}4x^2-9y^2=15①\\2x-3y=5②\end{cases}$，由②得到$x=\frac{3y+5}{2}$，代入①，得到 3y+1=0，$y=-\frac{1}{3}$，x=2，经验算，方程组的解为$\begin{cases}x=2\\y=-\frac{1}{3}\end{cases}$，本例也可以这样求解：$\begin{cases}(2x-3y)(2x+3y)=15①\\2x-3y=5②\end{cases}$，将②代入①，得到$\begin{cases}(2x+3y=3①\\2x-3y=5②\end{cases}$，解为$\begin{cases}x=2\\y=-\frac{1}{3}\end{cases}$
  - 如果两个方程都是二元二次方程，可对其中一个因式分解，得出两个二元一次方程，分别与另一个二元二次方程联立求解，如$\begin{cases}x^2-3xy+2y^2=0①\\x^2+y^2=5②\end{cases}$，方程①因式分解为(x-2y)(x-y)=0，因此 x=2y

或 x=y，分别与方程②联立，得到$\begin{cases}x=2y\\x^2+y^2=5\end{cases}$和$\begin{cases}x=y\\x^2+y^2=5\end{cases}$，第一个方程组的解为$\begin{cases}x_1=\frac{\sqrt{10}}{2}\\y_1=\frac{\sqrt{10}}{2}\end{cases}$，$\begin{cases}x_1=-\frac{\sqrt{10}}{2}\\y_1=-\frac{\sqrt{10}}{2}\end{cases}$，第二个方程组的解为$\begin{cases}x_1=2\\y_1=1\end{cases}$，$\begin{cases}x_1=-2\\y_1=-1\end{cases}$，原方程有 4 组解

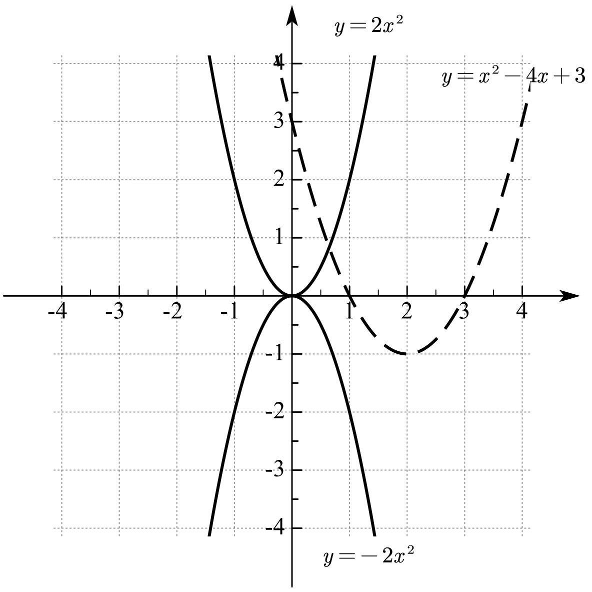
■ 又如$\begin{cases}x^2-9y^2=0①\\x^2-2xy-y^2=4②\end{cases}$，方程①得到(x-3y)(x+3y)=0，因此 x=3y 或 x=-3y，方程②得到 $(x-y)^2$ =4，因此(x-y)=±2，x=y+2 或 x=y-2，4 个解联立，$\begin{cases}x=3y\\x=y+2\end{cases}$，$\begin{cases}x=3y\\x=y-2\end{cases}$，$\begin{cases}x=-3y\\x=y+2\end{cases}$，$\begin{cases}x=-3y\\x=y-2\end{cases}$，最后解为$\begin{cases}x_1=\frac{3}{2}\\y_1=-\frac{1}{2}\end{cases}$，$\begin{cases}x_2=-\frac{3}{2}\\y_2=\frac{1}{2}\end{cases}$，$\begin{cases}x_3=3\\y_3=1\end{cases}$，$\begin{cases}x_4=-3\\y_4=-1\end{cases}$

16.5 应用题

- 求解后，要验根，舍去无实际意义的根

17 二次函数

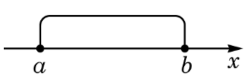
- 二次函数：形如$y=ax^2+\mathrm{bx}+\mathrm{c}$或$f(x)=ax^2+\mathrm{bx}+\mathrm{c}$（a、b、c 为常数且 a≠0），称为二次函数，x 是自变量，定义域为一切实数
- 二次函数$\mathrm{y=ax^2}$的图像：是一条抛物线，对称轴是直线 x=0（即 y 轴），顶点是原点，a>0 时，开口向上，顶点是最低点，a<0 时，开口向下，顶点是最高点
- 二次函数$\mathrm{y=ax^2+k}$的图像：是一条抛物线，对称轴是直线 x=0（即 y 轴），顶点是点(0,k)，a>0 时，开口向上，顶点是最低点，a<0 时，开口向下，顶点是最高点；将抛物线$\mathrm{y=ax^2}$上下平移 k 个单位长度，即得到抛物线$\mathrm{y=ax^2+k}$
- 二次函数$\mathrm{y=a(x+m)^2}$的图像：是一条抛物线，对称轴是直线 x=-m（平行于 y 轴），顶点是点(-m,0)，a>0 时，开口向上，顶点是最低点，a<0 时，开口向下，顶点是最高点；将抛物线$\mathrm{y=ax^2}$左右平移 m 个单位长度，即得到抛物线$\mathrm{y=a(x+m)^2}$
- 二次函数$\mathrm{y=a(x+m)^2+k}$的图像：是一条抛物线，对称轴是直线 x=-m（平行于 y 轴），顶点是点(-m,k)，a>0 时，开口向上，顶点是最低点，a<0 时，开口向下，顶点是最高点；将抛物线$\mathrm{y=ax^2}$上下平移 k 个单位长度，左右平移 m 个单位长度，即得到抛物线$\mathrm{y=a(x+m)^2+k}$
- 二次函数$y=ax^2+\mathrm{bx}+\mathrm{c}$的图像：使用配方法，将$ax^2+\mathrm{bx}+\mathrm{c}$配方成$\mathrm{a(x+m)^2+k}$，$ax^2+\mathrm{bx}+\mathrm{c}=\mathrm{a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}}$，$\mathrm{m=\frac{b}{2a}}$，$\mathrm{k=\frac{4ac-b^2}{4a}}$，因此抛物线$y=ax^2+\mathrm{bx}+\mathrm{c}$的对称轴是$\mathrm{x=-\frac{b}{2a}}$，顶点是点$\mathrm{(-\frac{b}{2a},\ \frac{4ac-b^2}{4a})}$，a>0 时，开口向上，顶点是最低点，a<0 时，开口向下，顶点是最高点；将抛物线$\mathrm{y=ax^2}$上下平移$\mathrm{\frac{4ac-b^2}{4a}}$个单位长度，左右平移$\mathrm{-\frac{b}{2a}}$个单位长度，即得到抛物线$y=ax^2+\mathrm{bx}+\mathrm{c}$



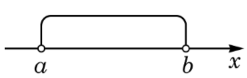
18 集合与逻辑

18.1 集合

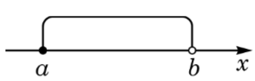
- 集合：集合由不重复的元素组成，集合用大写字母表示（自然数集符号为 N，整数集 Z，有理数集 Q，实数集 R），元素用小写字母表示，如集合 A 由元素 1、3、5、7、9 组成。不含任何元素的是空集 Ø，有限个元素的是有限集，否则是无限集，如 6 的所有倍数是无限集。a∈A（读作 a 属于 A），表示元素 a 是集合 A 的元素，a∉A（读作 a 不属于 A），表示元素 a 不是集合 A 的元素。
- 集合表示方法
  - 列举法：有限集可将所有元素列在大括号里，如$x^2-3x+2=0$的解集是{1，2}。集合中元素的顺序无所谓，如确定 x 和 y，使集合{2x，x+y}={4，8}，可列方程$\begin{cases}2x=4\\x+y=8\end{cases}$或$\begin{cases}2x=8\\x+y=4\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=2\\y=6\end{cases}$或$\begin{cases}x=4\\y=0\end{cases}$。
  - 描述法：把所有元素记作未知数 x，写出 x 的特征，如{x | x 满足的条件}。直角坐标平面上由第二象限与第四象限中的所有点组成的集合 C={（x，y）| xy<0 }，即所有横坐标或纵坐标<0 的点。
  - 区间法（仅适合实数集合）：当 a、b∈R 且 a<b 时，a 和 b 是实数区间的端点，
    - 闭区间：a≤x≤b 的实数 x 集合表示为[a，b]。
    - 开区间：a<x<b 表示为(a，b)。
    - 半开半闭区间：a≤x<b 表示为[a,b)，a<x≤b 表示为(a,b]，x≥a 表示为[a，+∞无穷大)，x>a 表示为(a，+∞)，x≤b 表示为(-∞，b]，x<b 表示为(-∞，b)，实数 R 表示为(-∞，+∞)。如实数集{x | 1≤x<2}表示为[1,2)，不等式 2x≤6 解集表示为(-∞，3]。



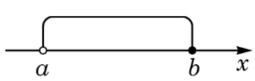
[a，b]



(a，b)



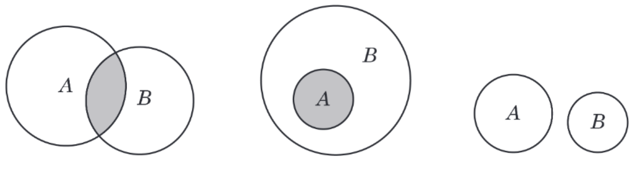
[a，b)



(a，b]

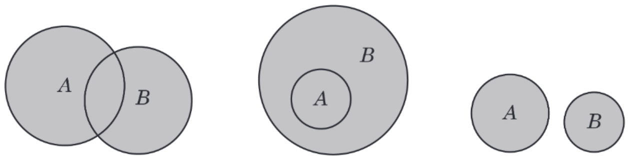
- 子集：如果集合 A 的每个元素都是集合 B 的元素，则 A 是 B 的子集，记作 A⊆B（读作 A 包含于 B）或 B⊇A（B 包含 A）。Ø⊆A；A⊆A；如 A⊆B 且 B⊆A，则 A=B；如 A⊆B 且 B⊆C，则 A⊆C。
- 真子集：如果集合 A⊆B，且 B 中至少有一个元素不属于 A，则 A 是 B 的真子集，记作 A⊂B（A 真包含于 B），或 B ⊃ A（B 真包含 A）。如 N⊂Z⊂Q⊂R，如写出集合{a，b，c}的真子集，即 Ø，{a}，{b}，{c}，{a，b}，{a，c}，{b，c}。如确定集合 A 和 B 的关系，A={n | n=3k+1，k∈N}，B={m | m=3t-2，t∈N}，由于当 k∈N 时，A 中的所有元素 n=3k+1=3(k+1)-2，因此 n∈B，所以 A⊆B，而 t=0 时，B 中元素 m=-2，由于-2∉A，所以 A⊂B。
- 交集：由既属于 A 又属于 B 的所有元素组成的集合叫集合 A 和 B 的交集，记作 A∩B（读作 A 交 B），

即 A∩B={x | x∈A 且 x∈B}。维恩图 1 阴影表示 A∩B，图 2 表示 A∩B=A，图 3 表示 A∩B=Ø。

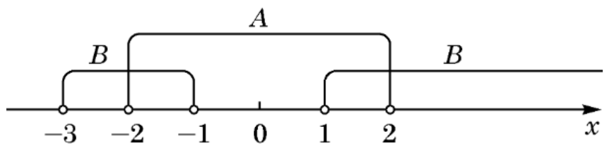


（1）　（2）　（3）

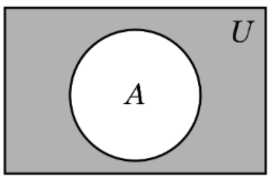
- 并集：由属于 A 或 B 的所有元素组成的集合叫集合 A 和 B 的并集，记作 A∪B（读作 A 并 B），即 A∪B={x | x∈A 或 x∈B}。维恩图 1 阴影表示 A∪B，图 2 表示 A∪B=B，图 3 表示 A∪B。已知 A=(-2，2)，B=(-3，-1)∪(1，+∞)，在数轴上作图，则 A∩B=(-2，1) ∪(1，2)，A∪B=(-3，+∞)。



（1）　（2）　（3）



- 补集：包含所有被研究元素的集合叫全集 U，A⊆U，$\bar{A}$（读作 A 补）是 A 在全集 U 中的补集（也记作 CuA），即$\bar{A}$={x|x∈U 且 x∉A}，下图阴影为示意。如 U=R 时，$\bar{Q}$=无理数。设 U={a，b，c，d，e}，A={a，b，c}，B={c，d}，则$\overline{AUB}=\{e\}$，$\bar{A}\cup\bar{B}=\{a,b,d,e\}$，$\overline{A\cap B}=\{a,b,d,e\}$，$\bar{A}\cup\bar{B}=\{e\}$。



18.2 逻辑

- 命题：格式为“若α，则β”，且能判断真假的陈述句叫命题，α是条件，β是结论。判断为真的命题是真命题，否则是假命题。若自然数的个位数字是 5，则它能被 5 整除，这是真命题。若两个三角形是直角三角形，则它们相似，这是假命题。你是学生吗？不是命题（不是陈述句）。X>1，不是命题，x 是未知数，无法判断真假。
- 真命题：若α，则β是真命题，指<u>所有</u>满足条件α的元素，都满足条件β，即{x|x 满足α}⊆{x|x 满足β}。证明真命题必须从正面给出证明，或者从反面给出证明（即反证法）。
- 假命题：若α，则β是假命题，指<u>存在</u>满足条件α的元素，它不满足条件β。假命题只要举出一个满足α但不满足β的例子即可。
- 推出：如果若α，则β是真命题，称为α⟹β（读作α推出β），或β⟸α（β被α推出）。如果α⟹β，β⟹γ，则α⟹γ。将“凡是素数都是奇数”改成“若α，则β”，并判断α⟹β是否成立。若 n 是素数，则 n 是奇数，这是假命题，因为 2 是素数但不是奇数，所以α⟹β不成立。
- 充要条件：如果两个陈述句α和β，α⟹β，则α是β的充分条件，β是α的必要条件。如果α⟹β且β⟹α，则α是β的充分条件和必要条件（简称充要条件），写作α⟺β（读作α和β等价），即α成立当且仅当β成立。如α为“四边形 ABCD 是正方形”， β是“四边形 ABCD 的四个内角为直角”，因为α⟹β，所以α是β的充分条件，但β不能推出α，所以α不是β的必要条件（但根据定义β是α的必要条件）。如α为“x^2是有理数”， β是“x 是有理数”，因为α不能推出β，所以α不是β的充分条件，而β⟹α，所以α是β的必要条件。
  - 例题：已知 m 是实数，M={2，3，m+6}，N={0，7}，证明“m=1”是“M∩N={7}”的充要条件。证明：先证明充分条件，当 m=1 时，M={2，3，7}，所以 M∩N={7}，因此“m=1”是“M∩N={7}”的充分条件。再证明必要条件，当 M∩N={7}时，7∈M，所以 m+6=7，m=1，因此“m=1”是“M∩N={7}”的必要条件。综上，“m=1”是“M∩N={7}”的充要条件。
- 反证法：要证明若α，则β，<u>首先假设β不成立，然后推理出矛盾的结论，说明β成立</u>。如设 n∈Z，若n^2是偶数，则 n 是偶数。证明：假设 n 不是偶数，即 n 是奇数，则 n=2k+1（k∈Z），因为$n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4(k^2+k)+1$，由于$4(k^2+k)$是偶数，所以$4(k^2+k)+1$是奇数，这说明$n^2$是奇数，与已知条件矛盾，因此 n 是奇数的假设不成立，n 是偶数。

常用α	α的否定形式

x>1	x≤1
x>1 或 y>1	x≤1 且 y≤1
集合 A 中满足性质 P 的元素至少有两个	集合 A 中满足性质 P 的元素最多有一个
所有的 x∈A 满足性质 P	至少存在一个 x∈A 不满足性质 P
所有的 x∈A 不满足性质 P	至少存在一个 x∈A 满足性质 P

- 例题：设 x、y∈R，证明：若 x+y>2，则 x>1 或 y>1。用反证法证明：若 x≤且 y≤1，则 x+y≤2，这与已知条件矛盾，说明假设不成立，所以 x>1 或 y>1。
- 例题：证明$\sqrt{2}$是无理数。用反证法证明：若$\sqrt{2}$是有理数，因为有理数可写成最简分数，设$\sqrt{2}=\frac{m}{n}$，其中 m、n 是互素的正整数，因此$m^2=2n^2$，说明m^2是偶数，那么 m 也是偶数（两个偶数相乘积是偶数，两个奇数相乘积是奇数），因此设 m=2k（k 为正整数），则$4k^2=2n^2, 2k^2=n^2$，说明 n 也是偶数，所以 m、n 不互素（两个偶数有公因数 2），说明假设不成立，所以$\sqrt{2}$是无理数。

19 等式与不等式

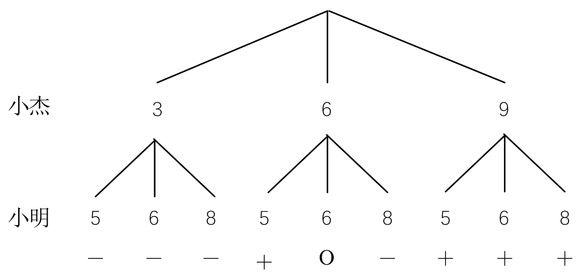
19.1 等式

-

二、概率统计

1 概率

- 随机事件：确定会发生或不会发生的事件叫确定事件（确定发生叫必然事件，确定不发生叫不可能事件），可能会发生也可能不发生的事件叫随机事件，掷一颗骰子得到的点数小于 3 是随机事件，得到的点数小于 7 是确定事件
- 概率：随机事件发生的可能性大小是概率 P，不可能事件概率为 0，必然事件概率为 1，随机事件概率为 0<P<1，如所有可能结果数为 n，事件 A 可能结果数是 k，则 P(A)=$\frac{事件A的可能结果数}{所有的可能结果的总数}=\frac{k}{n}$，如布袋中有 3 个白球、2 个黑球、1 个黄球，从袋中任意摸出 1 个球，则随机事件 1（摸出白球）的概率是$\frac{3}{6}\times 100\%=50\%$，随机事件 2（摸出黑球）的概率是$\frac{2}{6}\times 100\%=33.3\%$，随机事件 3（摸出黄球）的概率是$\frac{1}{6}\times 100\%=16.7\%$，因此随机事件 1 的可能性最大，随机事件 3 的可能性最小
- 树形图：一个试验分几步进行，树枝就分几级，最后一级树枝的条数是所有结果个数。如小杰和小明玩扑克牌，各出一张牌，谁大谁赢，同样大就平，小杰手中有 3、6、9，小明手中有 5、6、8，这时每人任出一张牌，小杰、小明谁获胜机会大？画树形图，小杰为一级，小明为二级，十表示小杰赢，一表示小杰输，O 表示平，共有 9 个结果，其中小杰赢的 4 个，所以小杰赢的概率为$P(A)=\frac{4}{9}$，小明更可能赢

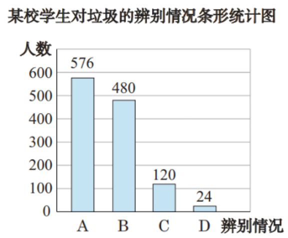


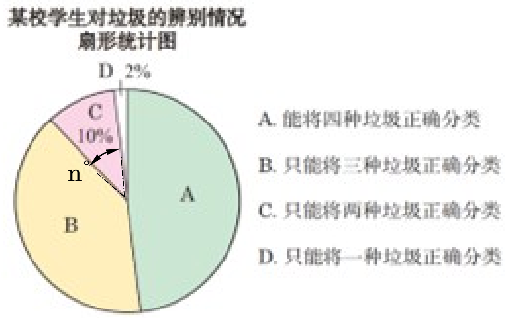
2 统计

- 统计方法：先调查收集数据，然后分析数据，得到结论或找出规律，调查数据时，全体调查对象的数据叫总体（调查对象本身不是总体），每个调查对象的数据叫个体（调查对象本身不是个体），从总体中

取出一部分个体叫样本，样本中个体的数量叫样本容量，如调查全校身高，全校学生的身高是总体（不是全校学生是总体），每个学生的身高是个体（不是每个学生是个体），如果每班挑选一个学生进行测量，全校有 30 个班级，则选出的 30 人的身高数据是样本，30 是这个样本的容量

- 收集数据
  - 全面调查：调查全部个体，优点是结果准确，缺点是个体很多时，时间和成本高，当个体较少时，可全面调查，如统计六 2 班学生的平均身高时
  - 抽样调查：只调查部分样本，然后用样本来推断总体，优点是节省时间和成本，缺点是不如全面调查准确；当个体很多时，只能抽查，如调查全国人口数量，只能抽查 1%的人口，当调查会破坏个体时，也只能抽查，如调查所有产品的变质期，不可能测试所有产品让它们都变质，只能抽查部分产品看它们的过期时间
  - 随机样本：抽样时，为了准确推断总体，样本的选择要具有代表性，即每个个体被选出来的概率要相同，这样选出的样本称为随机样本，如果抽查的不是随机样本，则推断出的总体数据不准确，如将 20 只黑叶猴背上涂一个色块做标记，如果在保护区内不同的地方观察到 60 只黑叶猴，其中 2 只有记号，假定有记号的黑叶猴在保护区里均匀分布，观察到的黑叶猴又是随机的，因此被观察到的 2 只有记号的黑叶猴：被观察到的 60 只黑叶猴=全部 20 有记号的黑叶猴：黑叶猴总数 x，即 $\frac{2}{60}=\frac{20}{x}$，$x=600$，因此推断保护区里共有 600 只黑叶猴
- 展示数据
  - 条形图：表示每个部分的具体数量，如下图表示 ABCD 四类学生人数





  - 扇形图：表示各部分在整体中的占比，每个扇形代表一个部分，$\frac{该部分数量}{整体数量}\times 100\%=\frac{该扇形面积}{圆面积}\times 100\%=\frac{圆心角n°}{360°}\times 100\%$，画扇形图的方法：分别计算各类学生人数占全部人数的百分比，然后计算各扇形的圆心角并画出各扇形，如已知 C 类学生人数占全校人数的 10%，则 C 扇形圆心角$n=360\times 10\%=36^{\circ}$，反之如已知 C 扇形圆心角为 36°，则可计算 C 类学生人数占全校人数的百分比为$\frac{36}{360}\times 100\%=10\%$
  - 折线图：表示数据的变化趋势，如上升、下降
- 统计量
  - 表示一组数据的平均值
    - 平均数：$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$，如果每个数都增加 a，则平均数也增加 a，即$x_1'=x_1+a$，$x_2'=x_2+a$，…，$x_n'=x_n+a$，则$\bar{x}'=\frac{x_1+a+x_2+a+\cdots+x_n+a}{n}=\bar{x}+a$；样本所有个体的平均数叫样本平均数，总体所有个体的平均数叫总体平均数，随机样本的容量越大，样本平均数就越接近于总体平均数，可以用样本平均数来估计总体平均数；平均数比较敏感，能反映所有数据的情况，缺点是易受极端值的影响
    - 加权平均数：$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\frac{1}{n}x_1+\frac{1}{n}x_2+\cdots+\frac{1}{n}x_n$，$\frac{1}{n}$表明各数对平均数的影响程度相同，如果各数对平均数的影响程度不同，则$\bar{x}=\frac{m_1}{n}x_1+\frac{m_2}{n}x_2+\cdots+\frac{m_n}{n}x_n$，而$\frac{m_1}{n}$、$\frac{m_2}{n}$、…、$\frac{m_n}{n}$称

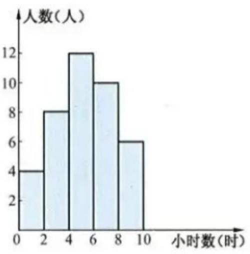
为权，如 100 个种子发芽，1 天就能发芽的有 15 颗，2 天有 45 颗，3 天有 35 颗，4 天有 5 颗，则发芽的平均天数=$\frac{15}{100}\times 1+\frac{45}{100}\times 2+\frac{35}{100}\times 3+\frac{5}{100}\times 4=\frac{230}{100}=2.3$天

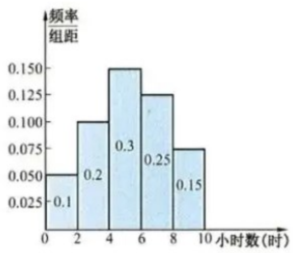
- ◆ 中位数：将 n 个数从小到大排列，n 为奇数时居中的 1 个数（第$\frac{n+1}{2}$个数），n 为偶数时居中的 2 个数（第$\frac{n}{2}$、$\frac{n}{2}$+1 个数）是中位数
- ◆ 众数：n 个数中，出现次数最多的数是众数，中位数和众数不受极端值的影响，运算简单，但不能反映所有数据的情况，一组数据的中位数是唯一的，而众数有可能不唯一
- ◆ 截尾平均数：去掉一组数中的 1 个最大值、1 个最小值，然后再求的平均数
- ◆ 当一组数中存在极端值时，使用中位数、众数、截尾平均数更能反映一组数的平均值，如抽奖活动 1 人获得 2500 元，11 人各获得 50 元，37 人各获得 20 元，61 人各获得 10 元，则平均数=40 元，中位数为 10 元，众数为 10 元，使用中位数、众数更能反映大多数人的金额

■ 表示一组数据的<u>波动程度</u>

- ◆ 方差：如果一组数据$x_1,x_2,\ldots,x_n$，它们的平均值是$\bar{x}$，方差是每个数与平均值的差的平方的平均数，即$s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]$，方差的单位是数据的单位的平方；如果$x_1,x_2,\ldots,x_n$的方差是$s^2$，则$x_1+a,x_2+a,\ldots,x_n+a$的方差仍为$s^2$
- ◆ 标准差：方差的非负平方根，即$s=\sqrt{\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]}$，标准差的单位是数据的单位
- ◆ 方差与标准差反映了一组数据波动的大小，一组数据越接近于它们的平均数，方差与标准差就越小，这时平均数就越具有代表性，当一组数据中所有数相等时，方差与标准差为零
- ◆ 例：两名射击运动员分别进行 5 次射击，甲的平均成绩是 9.8 环，方差是 0.02，乙的平均成绩也是 9.8 环，方差是 0.032，虽然两人平均成绩相同，但甲的方差更小，说明甲每次成绩在 9.8 环上下波动更小，甲的成绩更稳定

■ 表示一组数据的分布





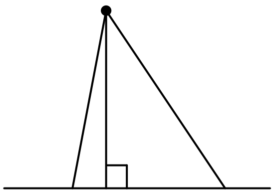
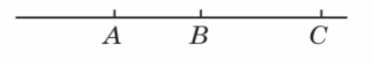
- ◆ 频数：各组样本的样本个数，如频数直方图横轴表示每周阅读时长分别为 0-2、2-4、4-6、6-8、8-10 小时，纵轴表示各时长的学生人数，绘制方法：（1）计算数据波动范围（最大值-最小值=10 小时），（2）确定组数和组距，现在有 40 人，可以 8 人一组，分成 5 组，组距为$10\div 5=2$小时，（3）确定每组的最大值、最小值，每组一般包括最小值，不包括最大值，比如第 1 组包括 0 小时，不包括 2 小时，确定每组频数（即人数），横轴为阅读时长，纵轴为人数
- ◆ 频率：各组样本数量占全部样本的比例，各组频率=$\frac{各组样本的频数}{全部样本数}$，绘制频率直方图：（1）计算上面案例中 0-2 小时的学生频率为$\frac{4}{40}=0.1$，2-4 小时的学生频率为$\frac{8}{40}=0.2$，4-6 小时的频率为$\frac{12}{40}=0.3$，6-8 小时的频率为$\frac{10}{40}=0.25$，8-10 小时的频率为$\frac{6}{40}=0.15$，(2)将各组频率÷组距，作为各组高度，而每组矩形的面积表示该组的频率，因此各组矩形的总面积是各组频率之和即 1；可以认为 40 人样本的各组时长的频率就是全校 2000 学生在各组时长的频率，从而

推断全校各组时长的人数，如全校每周阅读时长 8-10 小时的人数是 2000×0.15=300 人

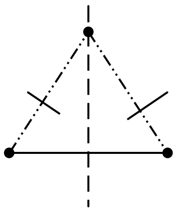
三、几何

1 平面几何

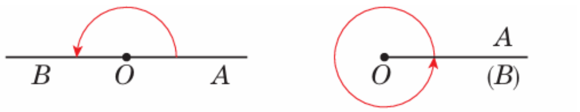
1.1 线

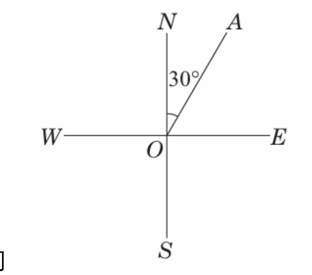
- 直线：经过一点有无数条直线，经过两点只有一条直线，直线向两端无限延伸，射线向一端无限延伸，线段两端固定
- 线段：两点之间线段最短，该线段长度就是两点的距离，一般用两个端点的字母表示线段，直线外一点与直线上各点的连接线段中，垂线段最短 
- 线段的和、差：如果一条线段的长度等于另外两条线段长度的和（或差），那么称这条线段就是另外两条线段的和（或差），

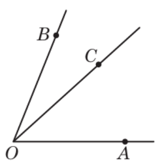
，AC=AB+BC，AC-BC=AB，AC-AB=BC
- 线段的垂直平分线：过线段中点且垂直于这条线段的直线叫垂直平分线，简称中垂线，中垂线上任意一点到线段两端的距离相等；和一条线段两端距离相等的点，都在线段的中垂线上



1.2 角

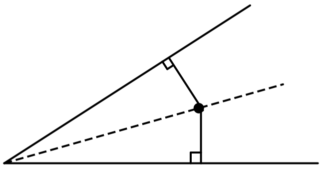
- 角：一条射线绕端点旋转到另一个位置所成的图形，当两条射线呈一条直线时是平角（180°），两条射线重合时是周角（360°）

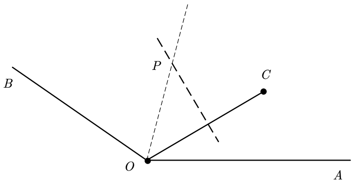
- 角度：1° = 60′（分），1′ = 60″（秒），48°56′37″读作 48 度 56 分 37 秒，180°-(35°18′ + 62°56′) =180°-98°14′=179°60′-98°14′=81°46′
- 方向：以正北、正南方向为基准，用角度来描述物体的方向，如北偏东 30°，南偏西 25°，图中 A 点在北偏东 30°的方向 

- 角的和、差：

$\angle BOC + \angle AOC = \angle AOB$，$\angle AOB - \angle AOC = \angle BOC$，$\angle AOB - \angle BOC = \angle AOC$
- 余角：如果两个角和等于 90°，称为互为余角（互余），其中一个角称为另一个角的余角，同角或等角的余角相等

- 补角：如果两个角的和等于 180°，称为互为补角（互补），其中一个角称为另一个角的补角，同角或等角的补角相等
- 角平分线：角是轴对称图形，对称轴是角平分线，即从一个角的顶点引出一条射线，把这个角分成两个相等的角，角平分线上的点到角两边的直线的距离相等，到角两边直线的距离相等的点都在角平分线上

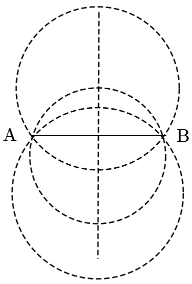


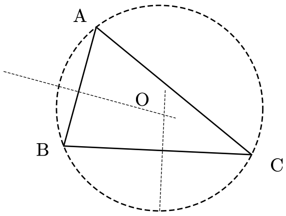


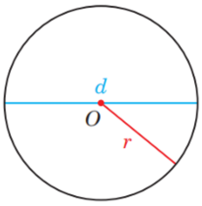
- 交轨作图法：先找出符合一部分作图要求的点的轨迹，再找出符合另一部分作图要求的点的轨迹，两个轨迹的交点就是所求，如已知∠AOB 和其内的一点 C，求作点 P，使 PC=PO，且点 P 到 OA 和 OB 的距离相等，解：首先连接 OC，作线段 OC 的垂直平分线，其次作出∠AOB 的角平分线，两条线交点即为 P

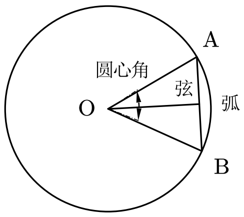
1.3 圆

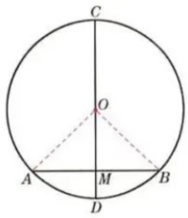
- 圆：以 O 为圆心的圆记作⊙O，圆是轴对称图形，任一直径都是圆的对称轴；点与 O 距离 d>半径 r 时点在圆外，d=r 时点在圆上，d<r 时点在圆内；圆周经过两个点的圆有无数个，它们的圆心都在联结两点的线段的垂直平分线上；不在一条直线上的三个点可以确定一个圆，这个圆是三角形的外接圆，这个三角形是圆的内接三角形，外接圆的圆心是三角形的外心（三边的垂直平分线交点），作 AB、BC 的垂直平分线，交点即为圆心；如果一个圆经过多边形的各顶点，则该圆为多边形的外接圆，多边形为圆的内接多边形



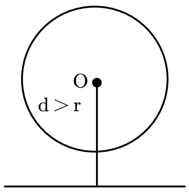




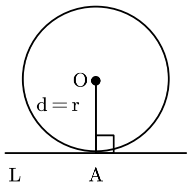




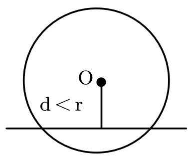
- 弧、弦、圆心角：圆上任意两点之间的部分叫弧，小于半圆的弧叫劣弧，大于半圆的弧叫优弧，能重合的两条弧叫等弧，联结圆上两点的线段叫弦，弧和弦构成弓形，过圆心的弦叫直径，弧和弦所对的角叫圆心角，如弧$\widehat{AB}$是圆心角∠BOA 所对的弧，圆心到弦的距离叫弦心距；在同圆或等圆中，两个圆心角、两个弧、两个弦、两个弦心距中有一组相等，则其它三组也相等；如果一条直径垂直于一条弦，则平分该弦及弦所对的弧（垂径定理），如 CD⊥AB，则 AM=MB，$\widehat{AD}=\widehat{DB}$，在圆中，某一条直线"经过圆心（即是直径）"、"垂直于弦"、"平分弦"、"平分弦所对的弧"这四组关系中，如果有两组关系成立，那么其余两组关系也成立
- 圆周长：r 为半径，d 为直径，圆的周长$C=\pi d=2\pi r \quad (\pi=3.14)$，注意：未要求结果保留两位小数时，结果都写成 nπ的形式，而不把π按 3.14 计算
- 弧长：因为圆心角与 360°之比等于弧长与圆周长之比，因此弧长$l=\frac{n}{360}\cdot 2\pi r=\frac{n\pi r}{180}$
- 圆面积：$S=\pi r^2$
- 扇形面积：因为圆心角与 360°之比等于扇形面积与圆面积之比，所以扇形面积$S_{扇}=\frac{n}{360}\cdot\pi r^2=\frac{n\pi r^2}{360}$



相离

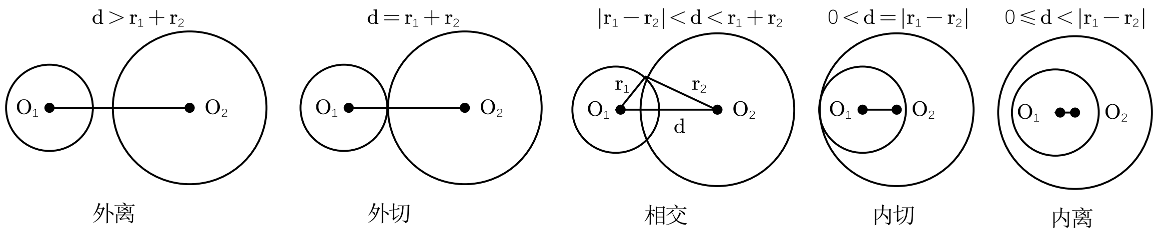


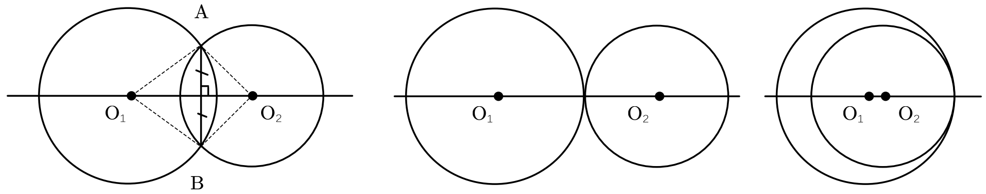
相切



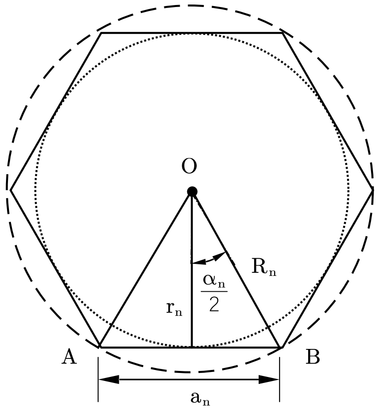
相交

- 圆与直线：d 为圆心与直线距离，圆与直线有相离、相切（1 个交点，叫切点）、相交（2 个交点）三种关系；经过半径的外端且垂直于这条半径的直线是圆的切线（切线定理）

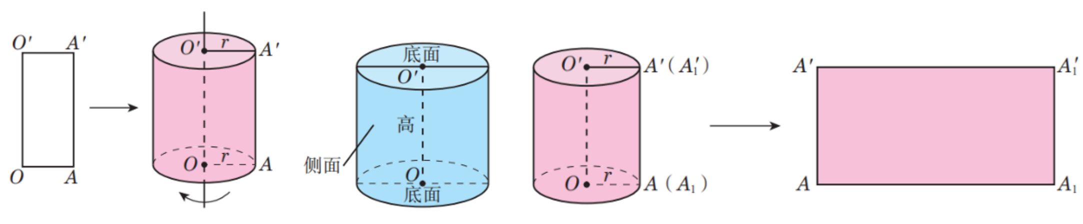




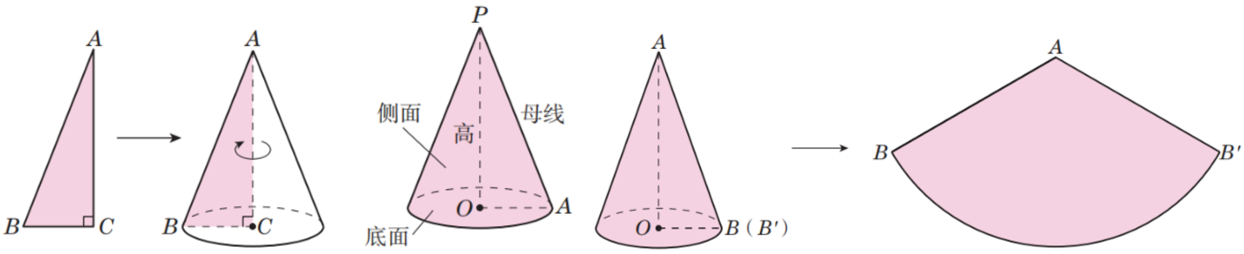
- 圆与圆：两个圆心连线是连心线，d 为圆心距，两圆有外离、外切（1 个交点，叫切点）、相交（2 个交点）、内切、内含五种关系，两个圆心重合时叫同心圆，相交两圆的连心线垂直平分两圆的公共弦，相切两圆的连心线经过切点；已知⊙A 和⊙B 相切，圆心距 d=10，⊙A 半径为 4，求⊙B 半径？解：设⊙B 半径为 r，如果外切则 10=4+r，r=6，如果内切则$10 = |r - 4|$，r=14 或-6（舍去）



- 圆与正多边形：各边相等、各角也相等的多边形叫正多边形，正多边形是轴对称图形，正多边形有一个外接圆和一个内切圆，圆心是正多边形的中心（各对称轴的交点），内接圆半径叫正 n 边形的边心距r_n，外接圆半径叫正 n 边形的半径R_n，相邻半径的夹角叫正 n 边形的中心角$\propto_n$（$\propto_n = \frac{360^\circ}{n}$），正 n 边形的边长$a_n$，在等腰ΔOAB 中，这四个量已知两个，就可通过勾股定理算出另两个，并算出正 n 边形周长和面积
- 圆柱：将长方形$OAA'O'$以它的一条边OO'为轴，旋转一周形成圆柱，OO'为高，AA'为母线，OO'=AA'，$S_{侧} = Ch = 2\pi rh$，$S_{表} = 2\pi rh + 2\pi r^2$，$V = S_{底}h$

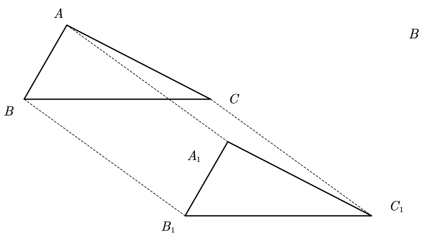


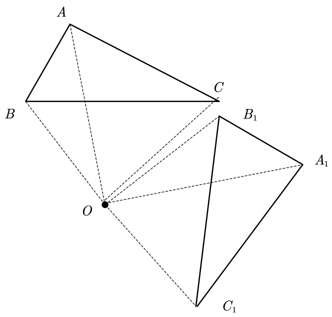
- 圆锥：将 RTΔABC 以直角边 AC 为轴，旋转一周形成圆锥，AO 为高，AB 为母线，$S_{侧} = \frac{1}{2}Cl$，$S_{表} = \frac{1}{2}Cl + \pi r^2$，$V = \frac{1}{3}S_{底}h$



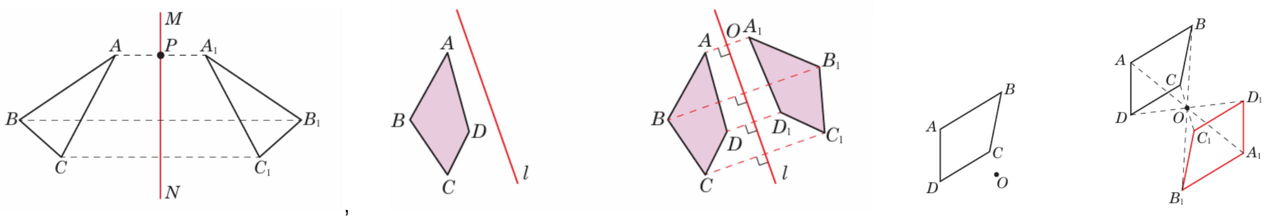
1.4 图形的运动

- 平移：将图形的所有点按某方向移动相同距离，如三角形 ABC 右移 4 格，下移 3 格，得到$A_1B_1C_1$，ABC 和$A_1B_1C_1$形状相同且大小相等，对应点的连线平行如$\mathrm{AA_1} \parallel \mathrm{BB_1} \parallel \mathrm{CC_1}$或在一条直线上且$\mathrm{AA_1} = \mathrm{BB_1} = \mathrm{CC_1} =$平移距离，对应角相等如$\angle\mathrm{A} = \angle\mathrm{A_1}$，$\angle\mathrm{B} = \angle\mathrm{B_1}$，$\angle\mathrm{C} = \angle\mathrm{C_1}$，对应线段平行如$\mathrm{AB} \parallel \mathrm{A_1B_1}$，$\mathrm{AC} \parallel \mathrm{A_1C_1}$，$\mathrm{BC} \parallel \mathrm{B_1C_1}$或在一条直线上且$\mathrm{AB} = \mathrm{A_1B_1}$，$\mathrm{AC} = \mathrm{A_1C_1}$，$\mathrm{BC} = \mathrm{B_1C_1}$





- 旋转：将图形的所有点绕点 O 顺时针或逆时针转动一个角度，点 O 叫旋转中心，角度叫旋转角，如将三角形 ABC 绕 O 点顺时针旋转 90 度，得到$A_1B_1C_1$，ABC 和$A_1B_1C_1$形状相同且大小相等，对应点到旋转中心的距离相等如$\mathrm{AO} = \mathrm{A_1O}$，$\mathrm{BO} = \mathrm{B_1O}$，$\mathrm{CO} = \mathrm{C_1O}$，每组对应点与旋转中心连线的角的角度相等如$\angle\mathrm{AOA_1} = \angle\mathrm{BOB_1} = \angle\mathrm{COC_1}$，对应线段的长度相等如$\mathrm{AB} = \mathrm{A_1B_1}$，$\mathrm{AC} = \mathrm{A_1C_1}$，$\mathrm{BC} = \mathrm{B_1C_1}$，对应角的大小相等如$\angle\mathrm{A} = \angle\mathrm{A_1}$，$\angle\mathrm{B} = \angle\mathrm{B_1}$，$\angle\mathrm{C} = \angle\mathrm{C_1}$
- 轴对称：将一个图形沿直线 MN 翻折，该图形在 MN 两边的部分重合（称为轴对称图形），或者该图形与另一个图形重合，则直线 MN 是对称轴，图形关于 MN 对称，重合点称为关于直线 MN 的对称点，线段、角、正方形和圆是轴对称图形，如三角形 ABC 沿着直线 MN 翻折后，与三角形$A_1B_1C_1$重合，ABC 与$A_1B_1C_1$关于直线 MN 成轴对称，直线 MN 是对称轴，点 A 与点A_1、点 B 与点B_1、点 C 与点C_1是关于直线 MN 的对称点；ABC 与$A_1B_1C_1$形状相同，大小相等，对应线段相等如$\mathrm{AB} = \mathrm{A_1B_1}$，$\mathrm{AC} = \mathrm{A_1C_1}$，$\mathrm{BC} = \mathrm{B_1C_1}$，对应角相等如$\angle\mathrm{A} = \angle\mathrm{A_1}$，$\angle\mathrm{B} = \angle\mathrm{B_1}$，$\angle\mathrm{C} = \angle\mathrm{C_1}$，连接对称点的线段和对称轴垂直并且被对称轴平分，如$\mathrm{AA_1} \perp \mathrm{MN}$，$\mathrm{AP} = \mathrm{PA_1}$，如要画出四边形 ABCD 关于直线 L 成轴对称的图形，只需要分别从 A、B、C、D 点作对称轴的垂线段且长度平分即可确定A_1、B_1、C_1、D_1

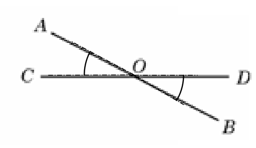


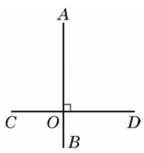
- 中心对称：如果一个图形的所有点绕着点 O 旋转 180°后，与原图形重合（称为中心对称图形），或与

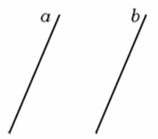
另一个图形重合，点 O 是对称中心，图形关于点 O 成中心对称，如四边形 ABCD 绕点 O 旋转 180°后与 $A_1B_1C_1D_1$重合，ABCD 和$A_1B_1C_1D_1$形状相同，大小相等，重合点称为关于点 O 的对称点，如点 A 和A_1是关于点 O 的对称点，对应线段平行如$AB \parallel A_1B_1$，$BC \parallel B_1C_1$，$CD \parallel C_1D_1$，$DA \parallel D_1A_1$，或在同一直线上且相等如$AB = A_1B_1$，$BC = B_1C_1$，$CD = C_1D_1$，$DA = D_1A_1$，连接每组对称点的线段都经过对称中心，如AA_1经过点 O，并且被对称中心平分，如$AO = OA_1$

1.5 相交与平行

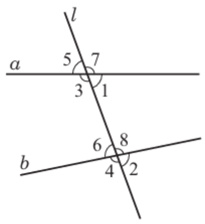
- 相交：经过两点只有一条直线；相交线的对顶角相等；如果两条直线的夹角是 90°，称为 AB 垂直 CD，记作 AB⊥CD，交点 O 为垂足；同一平面上，经过一点有且只有一条直线垂直于已知直线，点到直线的垂线段的长度叫作点到直线的距离，如 PO 长度为点 P 到直线 l 的距离

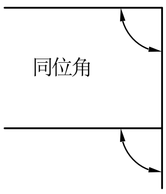


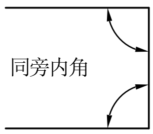


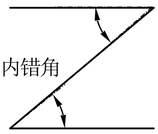


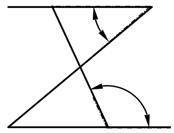
- 平行：在同一平面上不相交的两条直线叫作平行线，记作 a∥b；经过直线外的一点，有且只有一条直线与该直线平行；在同一平面上，如果直线 a∥b，a∥c，则 b∥c











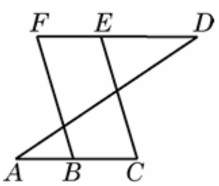
不是内错角

（非两条线与共同第三条线夹的角）

- 同位角：两条线与共同第三条线夹出同位角，如∠1 和∠2，∠5 和∠6，∠3 和∠4，如果同位角相等，则 a//b；如果 a//b，则同位角相等
- 同旁内角：两条线与共同第三条线夹出同旁内角，如∠1 和∠8，∠3 和∠6，如果同旁内角互补，则 a//b；如果 a//b，则同旁内角互补
- 内错角：两条线与共同第三条线夹出内错角，如∠1 和∠6，∠3 和∠8，如果内错角相等，则 a//b；如果 a//b，则内错角相等

1.6 命题与证明

- 命题：可以判断其真假的语句叫命题，正确的命题叫真命题，错误的命题叫假命题，如对顶角相等是真命题，相等的角是对顶角是假命题
- 命题规范形式：如果……（这是条件），那么……（这是结论），命题“对顶角相等”写成规范形式：如果两个角是对顶角，那么他们相等
- 逆命题：把原命题的条件和结论互换，得到它的逆命题，如原命题“对顶角相等”的逆命题是“相等的角是对顶角”，原命题为真命题，逆命题可能是假命题
- 证明真命题：使用∵（因为），∴（所以）写出论证过程，在∴后面（）中写出依据



已知∠A = ∠D，∠C = ∠F，证明∠FBA = ∠C。

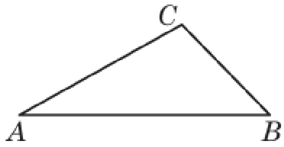
证明：∵∠A = ∠D，∴AC∥FD（内错角相等，两直线平行）∴∠F = ∠FBA（两直线平行，内错角相等）

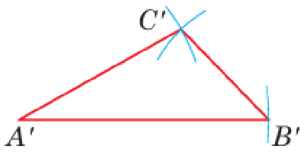
又∵　∠C = ∠F，∴　∠FBA = ∠C

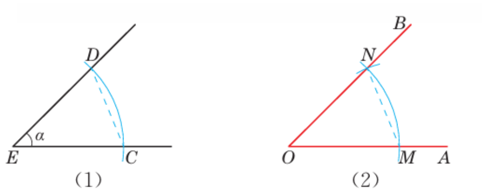
- 证明假命题：举出一个反例（符合条件，但不满足结论的例子）

1.7 尺规作图

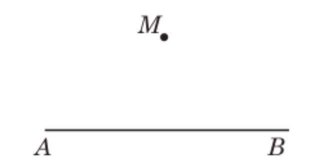
- 尺规作图：只能使用无刻度的直尺和圆规
- 作一个三角形，三边等于已知三角形：作$A'B'=AB$，分别以$A'和B'$为圆心，以线段 AC 和 BC 的长为半径画弧，两弧相交于点C'，连接$A'C'和B'C'$

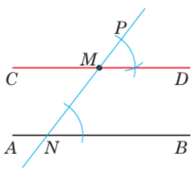


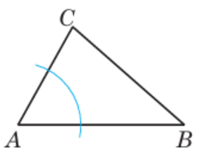


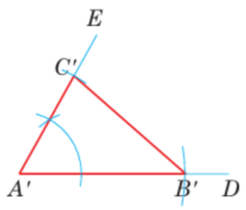


- 作一个角等于已知角：以∠α的顶点为圆心，以任意长度 a 为半径作弧，分别交∠α于 C、D 两点，过 O 点作一条任意射线 OA，以 O 为圆心，以 a 为半径作弧 1，交 OA 于 M 点，以 M 为圆心，以 CD 长度为半径作弧 2，交弧 1 于 N 点，连接 ON 和 NM

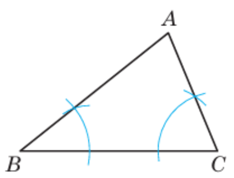


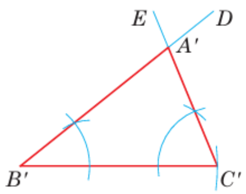


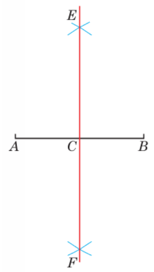


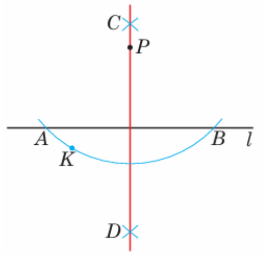


- 过直线外一点作已知直线的平行线：在直线上取点 N，作任意直线 NP，在 NP 上取点 M，过 M 点作∠PMD=∠PNB（方法同上），则 CD//AB
- 作一个三角形，两边及其夹角等于已知三角形：作∠$DA'E$=∠A（方法同上），以点A'为圆心，以 AC、AB 为半径作弧，分别交$A'E$于C'，交$A'D$于B'，连接$B'C'$

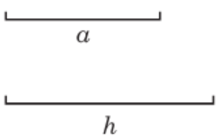


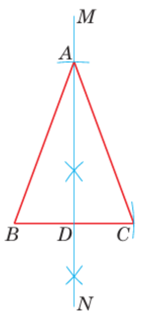






- 作一个三角形，两角及其夹边等于已知三角形：作$B'C'=BC$，分别以$B'和C'$为顶点，在$B'C'$同侧作$\angle B'=\angle B$，$\angle C'=\angle C$，射线$B'D和C'E$的交点为A'，连接$B'A'和C'A'$
- 作已知线段的垂直平分线：分别以 A、B 为圆心，以 AB 的长为半径作弧，分别相交于 E、F 点，连接 EF
- 过直线外一点作已知直线的垂线：在 AB 另一侧任选一点 K，以 P 为圆心，以 PK 为半径作弧，交 l 于 A、B 两点，作 AB 的垂直平分线 CD（方法同上）



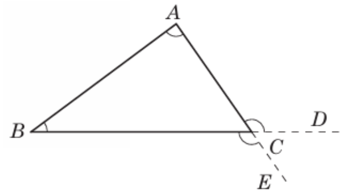


- 已知底边 a 和底边上的高 h 作等腰三角形：作 BC=a，作 BC 的垂直平分线 NM（方法同上），NM 交

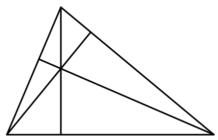
BC 于点 D，以 D 为圆心，以 h 为半径作弧，交 NM 于点 A，连接 AD

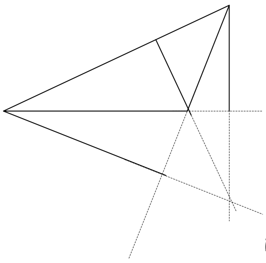
1.8 三角形

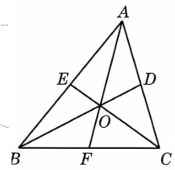
- 边长：任意两边差<第三边<任意两边和，符合不等式的三条边可形成三角形
- 内角：三角形的三个内角之和为 180°

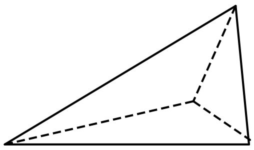


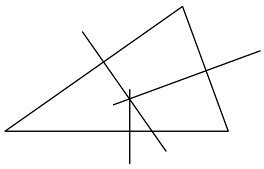
- 外角：内角的一边与另一边反向延长线的夹角是外角，外角等于与它不相邻的两个内角之和，如∠ACD 和∠BCE 为∠C 的外角，则∠ACD=∠BCE=∠A+∠B，每个内角选一个外角，则三个外角之和为 360°



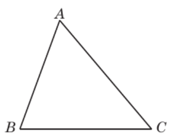


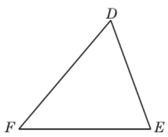


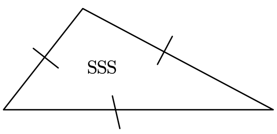


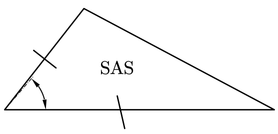


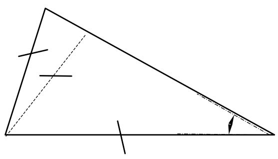
- 垂心：一个顶点向它的对边作垂线是高，三条高相交于一点（垂心）
- 重心：一个顶点连接它的对边中点是中线，三条中线相交于一点（重心），重心到顶点距离是重心到对边中点距离的 2 倍，如 AF 是中线，O 是重心，则 AO=2OF（重心定理）
- 内心：三条角平分线相交于一点（内心）
- 外心：三条垂直平分线相交于一点（外心）
- 全等：如果一个三角形平移、旋转、翻折后，与另一个三角形重合，则两个三角形全等，如果两个三角形都与第三个三角形全等，则这两个三角形全等，全等三角形的对应边相等，对应角相等，如ΔABC≌ΔDEF，则 AB=DE，BC=EF，AC=DF，∠A=∠D，∠B=∠E，∠C=∠F，两个三角形全等的条件：



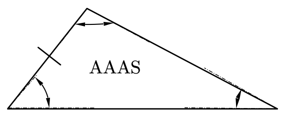




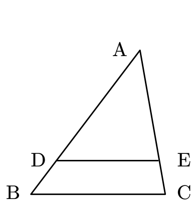


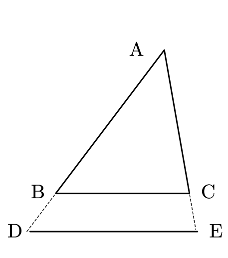


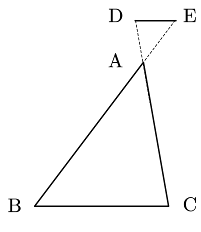
非两边的夹角，不全等

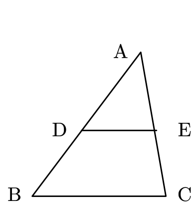


  - 三边相等（SSS，side 边），或两边相等及其夹角相等（SAS，必须是两边的夹角相等），或三角相等及一边相等（AAAS）



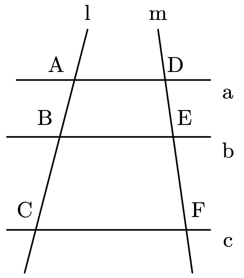


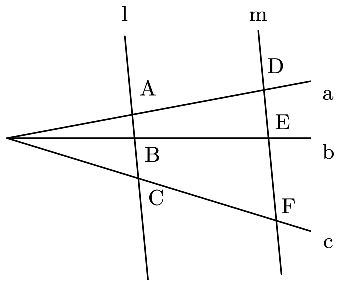




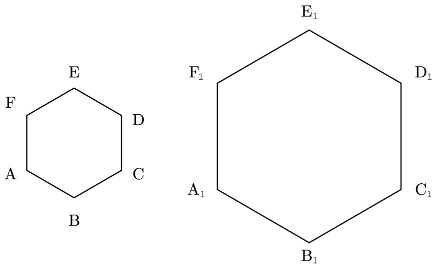
- 三角形一边的平行线：平行于三角形一边的直线截其他两边所在的直线（含同侧延长线），则各组对应线段成比例，例如$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$，$\frac{AD}{AE}=\frac{DB}{EC}$，$\frac{DB}{AB}=\frac{EC}{AC}$，$\frac{DB}{EC}=\frac{AB}{AC}$，*两个三角形的三边*$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$（注意各组之间不相等）；反之，如果任一组线段成比例，则该直线平行于三角形一边，特别的如 DE 是中位线

（两边中点连线），即$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}=\frac{1}{2}$，则 DE∥BC，DE=$\frac{1}{2}BC$（中位线定理）

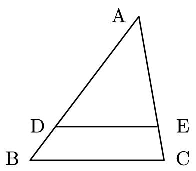


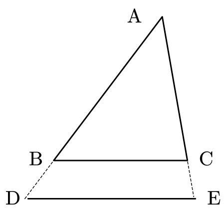


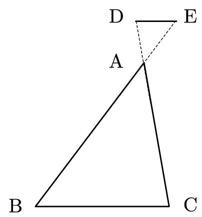
- 平行线分线段成比例定理：两条直线被三条平行直线所截，一条直线上被截的线段与另一条直线上的对应线段成比例，即$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$，$\frac{AB}{AC}=\frac{DE}{DF}$，$\frac{BC}{AC}=\frac{EF}{DF}$，*注意不等于第三条直线的线段即*$\frac{AB}{AC}\neq\frac{BE}{CF}$（特别的如果 AB=DE，则 BC=EF，在一条直线上截得的线段相等，那么在另一条直线上截得的线段也相等）；反之不成立（如右图，l//m 时，a、b、c 不平行，但$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}=\frac{BE}{CF}$)



- 相似：相似图形的对应角相等（即形状相同），对应边长成比例（即$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1D_1}{CD}=\frac{D_1E_1}{DE}=\frac{E_1F_1}{EF}=k$），k 称为相似比或相似系数，当 k=1 时全等（全等是相似的特例），如果$\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$，$\Delta ABC$与$\Delta A_1B_1C_1$的相似比是 k，则$\Delta A_1B_1C_1$与$\Delta ABC$ 的相似比是$\frac{1}{k}$，两个三角形相似的条件：
  - ■ 两个三角形分别与同一个三角形相似



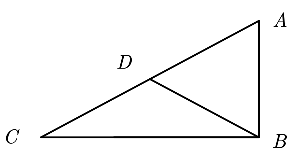


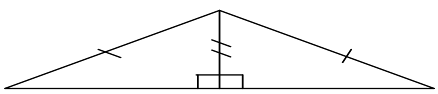


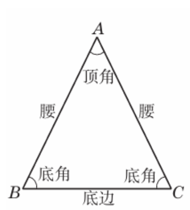
  - ■ 平行于一边的直线截其他两边（含同侧延长线），截得的三角形与原三角形相似
  - ■ 两角对应相等
  - ■ 两边对应成比例且夹角相等
  - ■ 三边对应成比例

相似三角形的性质：

- ■ 对应角相等
- ■ 对应边比例=对应高比例=对应中线比例=对应角平分线比例=周长比例=k
- ■ 面积比例=k^2



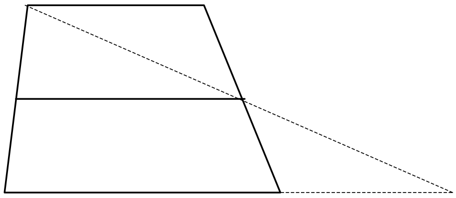




- 等腰三角形：一个三角形中，等边对等角/等角对等边，大边对大角/大角对大边，两腰相等则底角相等，底角相等则两腰相等；等腰三角形的顶角平分线、底边中线、底边高三线重合
- 等腰直角三角形：两腰相等（直角边），底角 45°，顶角 90°
- 等边三角形：三边相等则每个内角 60°，每个内角 60°则三边相等；等边三角形的各角平分线、各边中线、各边高重合，内心、垂心、重心、外心重合
- 直角三角形性质
  - 勾股定理：斜边平方=两直角边的平方和，斜边>任一直角边
  - 斜边上中线等于斜边一半；如果∠C=30°，则 30°所对直角边=斜边一半；如果直角边是斜边一半，则该直角边所对角为 30°
  - 斜边和一条直角边相等，则直角三角形全等
  - 斜边和一条直角边对应成比例，则直角三角形相似
- 直角三角形判定
  - 如一边平方=另两边的平方和，则是直角三角形；常见勾股数：$1^2+(\sqrt{2})^2=(\sqrt{3})^2, 3^2+4^2=5^2, 5^2+12^2=13^2$
  - 如一边中线等于该边的一半，则是直角三角形，且该边为斜边

1.9 四边形

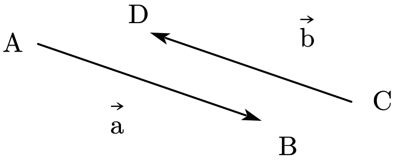
- n 边形的内角和为(n-2) ×180°，外角和为 360°
- 各类四边形判定：
  - 梯形：一组对边平行（上底和下底）；梯形中位线平行于两底，是两底和的一半



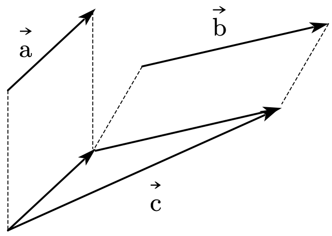
  - 等腰梯形：一组对边平行且底角相等，一组对边平行且对角线相等
  - 平行四边形：两组对边平行，两组对边相等，一组对边平行且相等，两组对角相等，对角线平分
  - 矩形：内角都是直角的四边形，一个内角是直角的平行四边形，对角线相等的平行四边形
  - 菱形：四边相等的四边形，一组邻边相等的平行四边形，对角线垂直的平行四边形（菱形面积为两条对角线长度之积的一半）
  - 正方形：内角都是直角且四边相等

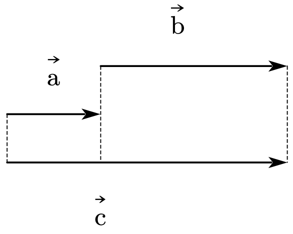
1.10 平面向量

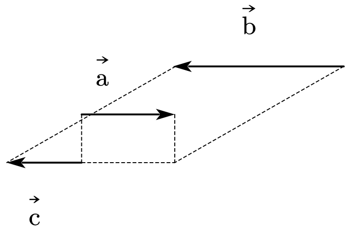
- 有向线段：$\overrightarrow{AB}$表示线段 AB 的起点是 A，终点是 B，作图时有向线段需在终点画箭头，如果两个有向线段平行或重合，则它们的方向相同或相反



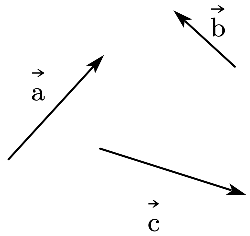
- 向量：既有大小又有方向的数叫向量，如$\vec{a}$，向量的大小叫向量的长度（也叫模），记作$|\vec{a}|$，长度为 0 的向量记作$\vec{0}$（注意，0 是数字 0，$\vec{0}$*是向量*），零向量的方向为任意方向，$|\vec{0}|=0$，方向相同或相反的向量是平行向量，记作$\vec{a}//\vec{b}$，<u>方向相同且大小相等的向量是相等向量</u>，记作$\vec{a}=\vec{b}$，<u>方向相反且大小相等的向量是相反向量</u>，记作$\vec{a}=-\vec{b}$，$\vec{a}-\vec{a}=\vec{0}$，$\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$，$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

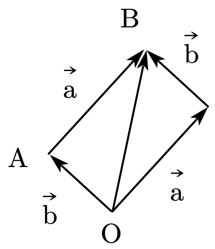


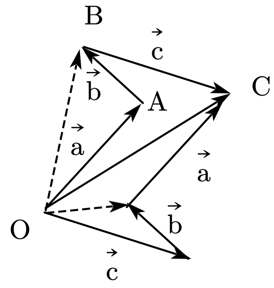




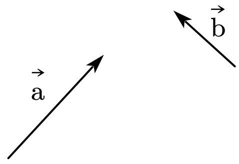
- 向量的加法：任取点 O，作向量$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，*则* $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OB}$，即各向量依次首尾相连，<u>和向量为 O 到终点</u>，交换律$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$，结合律$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+$ （$\vec{b}+\vec{c}$）

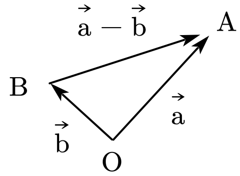


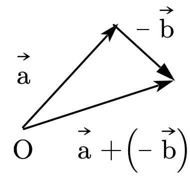




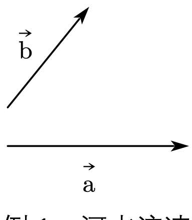
- 向量的减法：任取点 O，作向量$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，*则* $\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{BA}$，即以点 O 作两向量，<u>差向量为减向量终点到被减向量终点</u>（因为$\vec{a}=\vec{b}+\overrightarrow{BA}$），也可以$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$ 计算，即减去一个向量等于加上它的相反向量

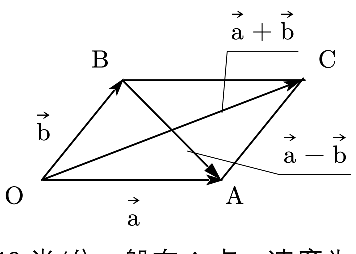


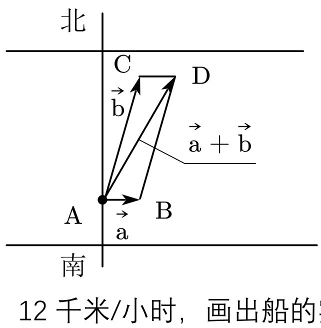




- 平行四边形法则：如果$\vec{a}$，$\vec{b}$不平行，则任取点 O，作$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，再以它们为邻边作平行四边形，则*对角线*$\overrightarrow{OC}=\vec{a}+\vec{b}$，*对角线*$\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}$

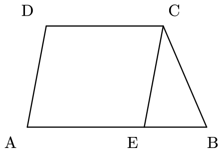






- 例 1：河水流速为 40 米/分，船在 A 点，速度为北偏东 10°，12 千米/小时，画出船的实际航行方向

解：船速 12 千米/小时=200 米/分，是河水速度的 5 倍，在 A 点作向量$\vec{a}$，$\vec{b}$代表河水速度和船速，$|\vec{b}|=5|\vec{a}|$，以$\vec{a}$*和*$\vec{b}$为邻边作平行四边形，则船实际方向$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AD}$



- 例 2：梯形 ABCD 中，AB//CD，求$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BE}$

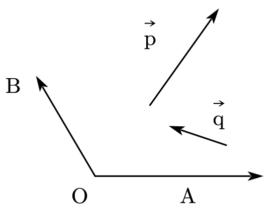
  解：$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$，而$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{EC}$，$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{BC}$

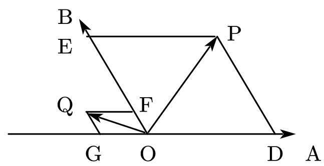
- 向量与实数相乘：k 为实数，$\vec{a}$是向量（$\vec{a}\neq\vec{0}$），$k\vec{a}$是一个向量（实数写在向量前，不要乘号），长度是|$k\vec{a}$|=|k| |$\vec{a}$|，方向是：*当 k>0 时，$k\vec{a}$与$\vec{a}$同向（平行*或重合*）*，*当 k<0 时，$k\vec{a}$与$\vec{a}$反向（平行*或重合*）*，*当 k=0 时*，$k\vec{a}=\vec{0}$；设 m，n 为实数，m(n$\vec{a}$)=(mn) $\vec{a}$，(m+n) $\vec{a}$=$m\vec{a}$+$n\vec{a}$，k($\vec{a}+\vec{b}$)=k$\vec{a}$+k$\vec{b}$

- 平行向量：如果向量$\vec{b}$与非零向量$\vec{a}$平行，那么存在唯一的实数，使$\vec{b}=m\vec{a}$，$m=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$，当$\vec{b}$*和*$\vec{a}$*同向时*，$\vec{b}=m\vec{a}$，当$\vec{b}$*和*$\vec{a}$*反向时*，$\vec{b}=-m\vec{a}$，已知$\vec{a}+\vec{b}=2\vec{c}$，$\vec{a}-\vec{b}=3\vec{c}$，$\vec{a}$*和*$\vec{b}$是否平行？因为$\vec{c}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$，$\vec{a}-\vec{b}=\frac{3}{2}(\vec{a}+\vec{b})$，$\vec{a}=-5\vec{b}$，所以$\vec{a}//\vec{b}$

- 单位向量：长度为 1 的向量是单位向量，设$\vec{e}$为单位向量，|$\vec{e}$|=1，单位向量有无数个（方向不同），对于非零向量$\vec{a}$，与它同方向的单位向量记作$\overrightarrow{a_0}$，$\vec{a}=|\vec{a}|a_0$，$\overrightarrow{a_0}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

- 向量的线性运算：向量之间的加减、向量和实数相乘的混合运算叫线性运算，已知$\vec{a}$*和*$\vec{b}$是不平行的向量，m、n 是实数，如果$\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$，则$\vec{c}$*是*$\vec{a}$、$\vec{b}$的线性组合，$\vec{c}$*是*$m\vec{a}$、$n\vec{b}$的合成，$m\vec{a}$、$n\vec{b}$*是*$\vec{c}$*在*$\vec{a}$、$\vec{b}$ *方向的分向量*，$m\vec{a}+n\vec{b}$是$\vec{c}$关于$\vec{a}$、$\vec{b}$的分解式，平面上任一向量都可以在给定的两个不平行向量的方向上分解，得到两个分向量

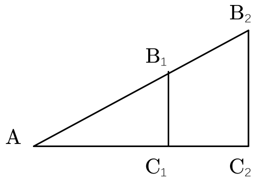


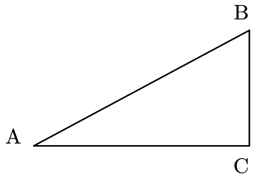


- 例 3：已知向量$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$和$\vec{p}$、$\vec{q}$，作出$\vec{p}$、$\vec{q}$在$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$方向的分向量

  解：作向量$\overrightarrow{OP}=\vec{p}$，$\overrightarrow{OQ}=\vec{q}$，过点 P 作 PE//OA 交 OB 于 E 点，作 PF//OB 交 OA 于 D 点，过点 Q 作 QF//OA 交 OB 于 F 点，作 QG//OB 交 OA 延长线于 G 点，则$\overrightarrow{OD}$、$\overrightarrow{OE}$是$\vec{p}$*的分向量*，$\overrightarrow{OG}$、$\overrightarrow{OF}$是$\vec{q}$ *的分向量*

1.11 锐角的三角比





- 锐角的三角比：因为$AB_1C_1 \sim AB_2C_2$，所以$\frac{B_1C_1}{AC_1}=\frac{B_2C_2}{AC_2}$，$\frac{B_1C_1}{AB_1}=\frac{B_2C_2}{AB_2}$，即锐角 A 的各相似直角三角形的三边比值是一个固定值（仅和 A 的大小有关），正弦$sinA=\frac{BC}{AB}(0<sinA<1)$，余弦$cosA=\frac{AC}{AB}(0<cosA<1)$，正切$tanA=\frac{BC}{AC}(tanA>0)$，余切$cotA=\frac{AC}{BC}(cotA>0)$，$tanA=\frac{1}{cotA}$
- 特殊锐角的三角比值（非特殊锐角的三角比值可使用计算器得出）

∝	tan∝	cot∝	sin∝	cos∝
30°	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45°	1	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60°	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

- 解直角三角形：直角三角形有 3 条边、2 个锐角，由于三角比固定、勾股定理，因此只要知道两条边，或一条边和一个锐角，就可以解出其它边和角，如已知∠A=30°，AC=2，则 AB=$\frac{AC}{cos30^{\circ}}=\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$